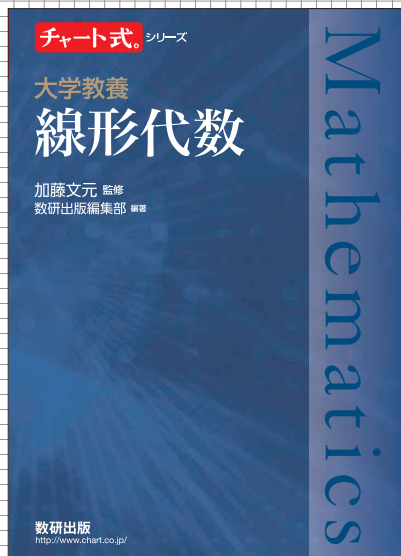
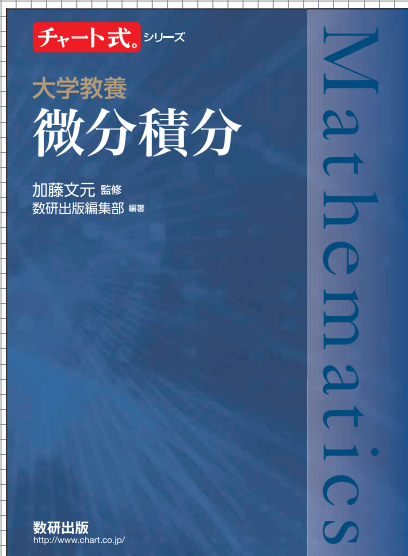
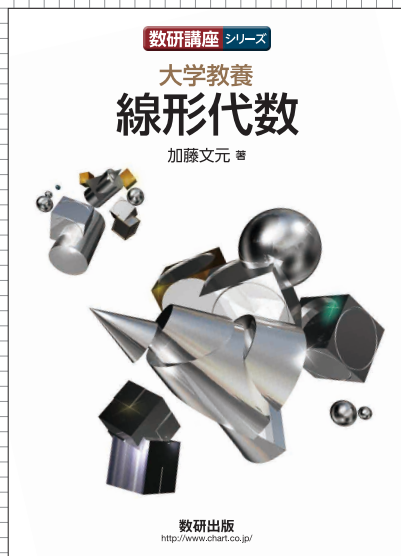
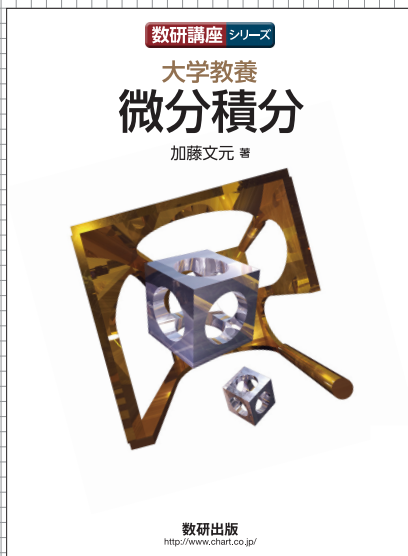


# ダイジェスト版



# 目次

\*微分積分，線分代数ともに，高校数学からの自然な接続を図るべく第0章を設けた。

## 数研講座シリーズ 大学教養 微分積分

|                       |     |              |     |              |     |
|-----------------------|-----|--------------|-----|--------------|-----|
| 第0章 高校数学<br>+ 大学数学の準備 |     | 第4章 積分 (1変数) |     | 第7章 積分 (多変数) |     |
| ①数と式，集合と証明            | 6   | ①積分の概念       | 130 | ①重積分         | 244 |
| ②数学の議論に必要な取り決め        | 9   | ②積分の計算       | 134 | ②重積分の応用      | 260 |
| ③三角関数に関する公式           | 9   | ③広義積分        | 147 | ③広義の重積分とその応用 | 266 |
| ④写像の基礎                | 10  | ④積分法の応用      | 154 | ④発展：重積分の存在   | 273 |
| ⑤大学数学で扱う記号，用語や表現      | 11  | ⑤発展：リーマン積分   | 160 | ⑤補遺：定理の証明    | 281 |
| 第1章 実数と数列             |     | 第5章 関数 (多変数) |     | 第8章 級数       |     |
| ①実数の連続性               | 14  | ①ユークリッド空間    | 170 | ①級数          | 292 |
| ②数列の収束と発散             | 23  | ②多変数の関数      | 178 | ②整級数         | 301 |
| ③単調数列とコーシー列           | 27  | ③補遺：定理の証明    | 190 | ③整級数の応用      | 312 |
| ④発展：上極限と下極限           | 45  | 第6章 微分 (多変数) |     | 第9章 微分方程式    |     |
| ⑤発展：小数展開              | 50  | ①多変数関数の微分    | 196 | ①微分方程式の基礎    | 322 |
| 第2章 関数 (1変数)          |     | ②微分法の応用      | 213 | ②線形微分方程式     | 329 |
| ①関数の極限                | 56  | ③陰関数         | 219 | 答の部          | 343 |
| ②極限の意味                | 61  | ④発展：写像の微分    | 227 | 索引           | 351 |
| ③関数の連続性               | 71  | ⑤発展：微分作用素    | 234 |              |     |
| ④初等関数                 | 75  | ⑥補遺：定理の証明    | 237 |              |     |
| ⑤補遺：定理の証明             | 83  |              |     |              |     |
| 第3章 微分 (1変数)          |     |              |     |              |     |
| ①微分可能性と微分             | 92  |              |     |              |     |
| ②微分法の応用               | 103 |              |     |              |     |
| ③ロピタルの定理              | 112 |              |     |              |     |
| ④テイラーの定理              | 120 |              |     |              |     |

### ●内容解説について

・内容解説を，各所に枠囲みで示しました。

## 手引き

### 章トビラ

例  
1

各章のはじめにその章で扱う節レベルの話題を抜粋した。そして，その章で扱われる主題への導入をはかった。

本文の理解を助けるための具体例である。

例題  
1

基本的な問題，および重要で代表的な問題である。「解答」や「証明」は，解答の簡潔な一例である。

練習  
1

例・例題の内容を反復学習するための問題である。よって，例・例題を学んだのち，まず学習者自身で練習することが望ましい。

### 章末問題

各章の終わりにある。その章で学習した内容の全体問題である。Aは主に計算問題を，Bは主に証明問題と，やや程度の高い問題である。

数研講座シリーズ 大学教養 線形代数

|               |    |               |     |                      |     |
|---------------|----|---------------|-----|----------------------|-----|
| 第0章 平面と1次変換   |    | 第4章 行列式       |     | 第7章 内積               |     |
| ① 1次変換        | 6  | ① 置換          | 98  | ① 内積と計量空間ベクトル        | 242 |
| ② 1次変換を示す式    | 7  | ② 行列式         | 107 | ② 直交変換とユニタリ表現        | 258 |
| ③ いろいろな変換     | 8  | ③ 行列式の計算      | 119 | 第8章 固有値問題と<br>行列の対角化 |     |
| 第1章 行列の概念     |    | 第5章 ベクトル空間    |     | ① 固有値と固有ベクトル         | 272 |
| ① 行列とは何か      | 16 | ① ベクトル空間と部分空間 | 136 | ② 正方行列の対角化           | 283 |
| ② 行列の演算       | 19 | ② 1次独立と1次従属   | 152 | ③ 最小多項式と対角化          | 308 |
| ③ 行列の種々の概念    | 30 | ③ 基底と次元       | 163 | 第9章 ジョルダンの標準形        |     |
| 第2章 連立1次方程式   |    | 第6章 線形写像      |     | ① 広義固有空間とジョルダンの標準形   | 326 |
| ① 連立1次方程式と行列  | 41 | ① 線形写像        | 192 | 答の部                  | 346 |
| ② 行列の基本変形     | 48 | ② 線形写像の基本性質   | 206 | 索引                   | 360 |
| ③ 連立1次方程式とその解 | 60 | ③ 線形写像の行列表現   | 224 |                      |     |
| 第3章 行列の構造     |    |               |     |                      |     |
| ① 基本行列と基本変形   | 75 |               |     |                      |     |
| ② 正則行列        | 85 |               |     |                      |     |
| ③ 逆行列         | 93 |               |     |                      |     |

**注意** 本文解説を補い、注意喚起を促す。

**研究** 本文の内容に関連したやや程度の高い内容を扱った。省略してもよい。

**発展** 大学1年制の微分積分学の範囲を超えた内容を扱った。省略してもよい。

**補遺** 本文に証明を載せなかった定理の証明を扱った。必ずしも知っておかなければならないものではなく、省略してもよい。

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
| C   | o | l | u | m | n |
| コラム |   |   |   |   |   |

本文の内容に関連した興味深い話題を取り上げた。

## 1 数と式

\* 高等学校の数学ⅠAⅡBの範囲から微分積分の学習に必要なものを抜粋して掲載した。

数研出版の高等学校向け数学教科書・参考書は、全国の高等学校で広くご採用いただいています。その経験をもとに大学向け教材「数研講座シリーズ」「チャート式シリーズ」を発行いたします。

## 数研講座シリーズ（教科書） 加藤文元 著



数研講座シリーズ 大学教養 微分積分 A5変型判 352頁 2色 2,500円＋税

数研講座シリーズ 大学教養 線形代数 A5変型判 288頁（予定）2色 価格未定

数研出版が、高校教材の作成から得た知見をもとに「高校数学から見上げた先にある大学数学」という視点で大学初年の教材を捉え直し、高校数学から大学数学への自然で連続的な接続を図る新たな“大学の教科書”を高校教科書の著者である加藤文元先生（東京工業大学）とともに提案します。

大学1年生を高校4年生と捉え直すことから始め、読者それぞれの専門や学習の進捗に合わせて多様な読み方ができる、微分積分と線形代数の半期講義向けの教科書です。微分積分は、高校の「数学Ⅲ」に続く「数学Ⅳ」、線形代数は、高校数学では学ぶことがなかった新しい概念である行列、ベクトル空間や線形写像（言い換えれば大学以降の数学を学ぶ上での文法）について基礎事項を明解に示し、丁寧に解説するという方針でまとめました。

- ① 取り扱われる内容それぞれの話題について「なぜ、そのことを話題とするのか？」を明示する導入があります。学習の動機づけをはっきりとさせ取り組みやすくしました。
- ② 高校数学の教科書のように、できるだけ具体的な説明から入る展開です。例や例題を盛り込み、図や模式図は適宜挿入しました。
- ③ 第0章として、冒頭に高校数学の内容で大学に必要な、大学数学に独特の定義・定理・用語を簡潔にまとめました。

## チャート式シリーズ（参考書） 加藤文元 監修 数研出版編集部 編著



チャート式シリーズ 大学教養 微分積分 A5変型判 392頁 2色 2,800円＋税

チャート式シリーズ 大学教養 線形代数 A5変型判 304頁（予定）2色 価格未定

数研講座シリーズ微分積分と線形代数の練習・章末問題（約200問）の解答に、問題を解くための指針を付した参考書です。慣れ親しんだ高校での学習から、スムーズに大学での学習に進めるよう高校教材のチャート式（青チャート）と同様の例題形式で編纂しています。また、チャート式シリーズのみに掲載する独自問題も微分積分、線形代数で約50問収録しました。

数研講座シリーズ と チャート式シリーズ を併用することで、さらに学習効果が高まります。

大学数学の微分積分学の冒頭では、実数の連続性と数列の極限に関して学習する。高校数学では漠然と理解してきたことを数学的に厳密に考察するが、その証明方法などは最初は戸惑うであろう。その中で、高校数学の範囲内ではあるが、教科書ではあまり扱われていなかった内容で重要なもの、および大学数学の初めに学習する内容を抜粋して紹介しよう。なお、高校数学では扱われていない内容のタイトルは、赤字で示した（②以降も）。

## ◆ 最大値・最小値、実数の整数部分を表す記号

$\max\{a, b\}$ ,  $\min\{a, b\}$

実数  $a$ ,  $b$  のうちで、 $\max\{a, b\}$  は最大値の方を表し、 $\min\{a, b\}$  は、最小値の方を表す。 $a=b$  ならば、 $\max\{a, b\}=\min\{a, b\}=a=b$  となる。 $\{ \}$  の中の実数が3個以上の場合も同じで、 $\{ \}$  の中の実数のうち、 $\max\{ \}$  は最大値を表し、 $\min\{ \}$  は最小値を表す。例えば、 $a=b>c$  なら  $\max\{a, b, c\}=a=b$ ,  $\min\{a, b, c\}=c$  である。

ガウス記号  $[ \ ]$ 

実数  $x$  に対し、ガウス記号  $[ \ ]$  を用いて  $[x]$  と表された数は、実数  $x$  の整数部分を表し、具体的には、不等式  $n \leq x < n+1$  を満たす整数  $n$  のことである。また、実数  $x$  の小数部分とは  $x - [x]$  のことで、 $0 \leq x - [x] < 1$  である。 $x$  が負の数のときの  $[x]$  には注意する。例えば、 $[-1.8] = -2$  ( $-1$  ではない)。

## ◆ 三角不等式

$a$ ,  $b$  を実数とすると、不等式  $|a+b| \leq |a|+|b|$  が成り立つ。

この不等式を三角不等式という。

これを変形すると  $|a+b|-|a| \leq |b|$  となる。ここで  $a+b=c$  とすると  $|c|-|a| \leq |c-a|$  となる。この形の三角不等式も、よく使われる。

三角不等式の拡張として、 $|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$  も成り立つ。三角不等式は、1章の  $\varepsilon-N$  (イプシロン-エヌ) 論法での証明や、第2章の  $\varepsilon-\delta$  (イプシロン-デルタ) 論法での証明によく使われる。

## ◆ 命題と条件

**命題** 正しいか正しくないかが明確に決まる式や文章を命題という。また、命題が正しいことを真であるといい、正しくないことを偽であるという。

\* 数列の収束について、 $\varepsilon-N$  論法は典型例に適用し丁寧な解説を加えた。

1  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  を示せ。

**証明** 任意の正の実数  $\varepsilon$  について、 $\varepsilon$  と 1 に対して系 1-1 を適用する。

このとき、 $\varepsilon > \frac{1}{N}$  となる自然数  $N$  がとれる。 $N$  以上のすべての自然数  $n$  について、 $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$  であるから、以下が成り立つ。

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

以上より、どんな正の実数  $\varepsilon$  が与えられても、その  $\varepsilon$  に応じて、 $N$  以降のすべての番号  $n$  について  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$  が成り立つような、番号  $N$  がとれることが示された。よって、題意が示された。■

**注意** 定義 2-1 において、一般に、番号  $N$  のとり方は正の実数  $\varepsilon$  に応じて変化するので、異なる  $\varepsilon$  の値に対しては、異なる番号  $N$  を選び直す必要がある。

例えば、例題 1 において、番号  $N$  は  $\varepsilon > \frac{1}{N}$  を満たすようにとらなければならないが、これがどんな正の実数  $\varepsilon$  についても成り立つように番号  $N$  をとることはできない。実際、どんな正の実数の  $\varepsilon$  に対しても  $\varepsilon > \frac{1}{N}$  となる番号  $N$  がとれるなら、1 の例題 2 (p. 21) から  $\frac{1}{N} = 0$  となってしまう、これは明らかに不合理だからである。

$N$  は任意に定めた正の実数  $\varepsilon$  の値それぞれに依存するものであって、一般には、オールマイティに同じ  $N$  をとるということではない。

以上のように、数列の収束を正の数  $\varepsilon$  や番号  $N$  などを用いて議論する方法を、イプシロン-エヌ  $\varepsilon-N$  論法 という。

**練習** 第  $n$  項が次の式で表される数列が、 $n \rightarrow \infty$  のときに、それぞれ括弧内の値に収束することを、 $\varepsilon-N$  論法を用いて証明せよ。

(1)  $\frac{n}{n+1}$  [1]      (2)  $\frac{1}{3n}$  [0]      (3)  $\frac{1}{2^n}$  [0]

\*  $\varepsilon-\delta$  論法について、図も用いて解説を加えた。

## 2 極限の意味

この節では、関数の極限について、高等学校までの直観的な理解から進んで、精密な議論を行うための基礎を学ぶ。

### ◆ $\varepsilon-\delta$ 論法

1 章では「 $n \rightarrow \infty$  のとき、数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  に収束する」ということの意味を、「いかなる正の実数  $\varepsilon$  に対しても、それに応じて番号  $N$  を選べば、 $N$  番目以降のすべての  $a_n$  は  $\alpha$  との差が  $\varepsilon$  より小さくなる」ということとして解釈した。つまり、 $\alpha$  と  $a_n$  の誤差  $|a_n - \alpha|$  をどのように小さく設定しても、それに応じて番号  $N$  を十分大きくすれば、それ以降は誤差をその値に収めることができる、ということである。本章で扱う「 $x \rightarrow a$  のとき、関数  $f(x)$  が  $\alpha$  に収束する」ということの意味も、同様に解釈することができる。この場合も、 $\alpha$  と  $f(x)$  との誤差、すなわち  $|f(x) - \alpha|$  の範囲をどのように小さく設定しても、それに応じて  $|x - a|$  を十分小さく設定すれば、その誤差を与えられた範囲に収めることができる、というように解釈する。このことを、図を用いて考えてみよう。

右の図のように、 $x \rightarrow a$  で関数  $f(x)$  が  $\alpha$  に収束するという状況を考える (図 1)。

「 $f(x)$  の値がどこまでも  $\alpha$  に近づく」というのは、 $f(x)$  と  $\alpha$  との「誤差」を、いくらでも小さくすることができる、ということ、つまり、与えられた (どんなに小さな) 正の実数  $\varepsilon$  に対しても、 $f(x)$  と  $\alpha$  との差を  $\varepsilon$  より小さくできるということである。

そこで、 $y$  軸上に、その「誤差の範囲」として、 $\alpha$  との差が  $\varepsilon$  よりも小である区間、すなわち、開区間  $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$  を考える (図 2)。

このとき、これに応じて  $a$  を中心とした開区間  $(a - \delta, a + \delta)$  を十分に小さくとる (図 3)。つまり、 $\delta$  を十分に小さい正の実数にとる。

$\delta$  が十分に小さければ、 $x$  が  $x \neq a$  を満たしながら開区間  $(a - \delta, a + \delta)$  の中にある限りは ( $x$

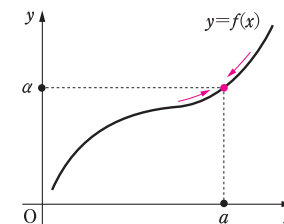


図 1

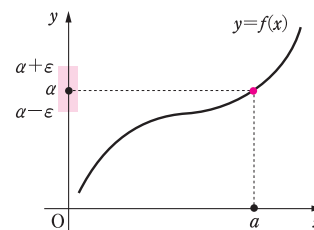


図 2

\*定義（関数の極限）の直後に具体例を配すことで、抽象的な数学文章も無理なく理解が深まるよう配慮した。

おさまるであろう（図4）。

逆に、このようなことができるとき、すなわち、与えられた（どんなに小さい）誤差の範囲  $\varepsilon$  に対しても、 $x$  と  $a$  との距離を十分に小さく設定すれば、 $f(x)$  と  $a$  の誤差を本当に  $\varepsilon$  よりも小さく収めることができる、ということを

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$  の意味と解釈するわけである。

以上より、関数の極限は、次のように定義される。

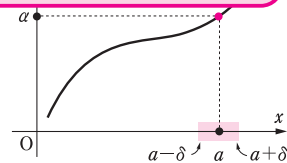


図3

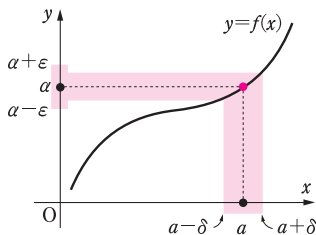


図4

### 定義 2-1 関数の極限

任意の正の実数  $\varepsilon$  に対して、ある正の実数  $\delta$  が存在して、 $f(x)$  の定義域内の  $0 < |x-a| < \delta$  であるすべての  $x$  について  $|f(x)-a| < \varepsilon$  となるとき、関数  $f(x)$  は  $x \rightarrow a$  で  $a$  に収束するという。

#### 例 1

関数  $f(x)=x^2+1$  は  $x \rightarrow 1$  で 2 に収束する。 $\varepsilon=0.1$  として、 $0 < |x-1| < \delta$  なら  $|f(x)-2| < \varepsilon$  を満たすような正の実数  $\delta$  を求める。 $|f(x)-2|=|x^2-1| < 0.1$  とすると  $-0.1 < x^2-1 < 0.1$  から  $0.9 < x^2 < 1.1$  であり、 $x > 0$  なら、 $\sqrt{0.9} < x < \sqrt{1.1}$  である。 $\sqrt{0.9}-1=-0.0513\cdots$ 、 $\sqrt{1.1}-1=0.0488\cdots$  より  $|\sqrt{0.9}-1| > |\sqrt{1.1}-1|$  なので、 $|x-1| < \sqrt{1.1}-1$  であれば、 $|f(x)-2| < \varepsilon$  となる。よって、 $\delta$  としては  $\sqrt{1.1}-1$  よりも小さい正の実数をとればよい。例えば  $\delta=0.04$  とすると  $|x-1| < 0.04$  から  $0.96 < x < 1.04$  で、 $-0.0748 < x^2-1 < 0.0816$  と計算され、次のようになる。 $|f(x)-2|=|x^2-1| < 0.0816 < 0.1 = \varepsilon$

このように、関数の極限を正の実数  $\varepsilon$ 、 $\delta$  などを用いて議論する方法のことを、  
イプシロンデルタ  $\varepsilon-\delta$  論法 という。

#### 練習 1

例1で  $\varepsilon=0.05$  のとき、 $\delta$  の値を1つ決めよ。また、一般の  $\varepsilon$  のとき、 $\delta$  はどうすればよいか。

\*ロピタルの定理は節レベルとし、証明まで扱い、不定形の極限について多くの練習問題を掲載した。

この節では、ロピタルの定理を紹介し、その証明を行う。

### ◆ロピタルの定理

高等学校の数学では、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  であることを学んだ。

この例のように、 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  という形の極限で、分子の極限  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  と分母の極限  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  が、ともに 0 に等しいか、あるいはともに  $\pm\infty$  に発散するものを、不定形の極限という。次のロピタルの定理は、不定形の極限を含めた、様々な形の極限の計算に大変便利な定理である（証明は後で行う）。

#### 定理 3-1 ロピタルの定理（その1）

$f(x)$ 、 $g(x)$  を开区間  $(a, b)$  ( $a < b$ ) 上の微分可能な関数とし、次の条件を満たすとする。

- (a)  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = 0$
- (b) すべての  $x \in (a, b)$  について  $g'(x) \neq 0$
- (c) 右極限  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  が存在する。

このとき、右極限  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$  も存在し  $\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  が成り立つ。更に、条件(a)を

- (a')  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$  かつ  $\lim_{x \rightarrow a+0} g(x) = \pm\infty$

でおき換えても、同じ結論が成り立つ。また、上記の条件および結論における右極限  $\lim_{x \rightarrow a+0}$  を、左極限  $\lim_{x \rightarrow b-0}$  におき換えても成り立つ。

注意 定理 3-1 の条件(b)は次でおき換えてもよい。

- (b') すべての  $x \in (a, a+\delta)$  について  $g'(x) \neq 0$  となるような正の実数  $\delta$  が存在する。

実際、このとき  $a+\delta=b$  とすれば、そのまま定理が成り立つ。

\* 抽象的な議論だが、意外にも画像処理や深層学習の基盤の理論となる。

## 発展 $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への写像

多変数関数とは、関数の定義域の次元を上げて得られたもので、その意味で1変数関数の一般化だったわけであるが、更に関数の値域の方の次元も上げて、 $n$ 次元から $m$ 次元への写像 (p. 11, 0章集合と写像参照) に一般化することができる。実は、このような「写像」を扱うことで、多変数の微分積分学の本質がより明確になることが多い。また、関数から写像への一般化によって、応用の幅も広がる。 $\mathbb{R}^n$  の部分集合  $S$  上で定義された  $m$  個の関数

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

が与えられているとする。このとき、任意の  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in S$  に対して、 $\mathbb{R}^m$  の点

$$(f_1(a), f_2(a), \dots, f_m(a))$$

$$= (f_1(a_1, a_2, \dots, a_n), f_2(a_1, a_2, \dots, a_n), \dots, f_m(a_1, a_2, \dots, a_n))$$

が定まる。これにより、 $S$  から  $\mathbb{R}^m$  への写像

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \mapsto (f_1(a), f_2(a), \dots, f_m(a)) \quad (*)$$

が定まる。 $(*)$  のような写像は

$$F: S \rightarrow \mathbb{R}^m, F(a) = (f_1(a), f_2(a), \dots, f_m(a))$$

のように、簡単に書かれることが多い。

例 3

$n$  変数の関数  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  は、 $\mathbb{R}^n$  の部分集合から  $\mathbb{R}$  への写像である。特に、2 変数関数  $z = f(x, y)$  は、 $\mathbb{R}^2$  の部分集合から  $\mathbb{R}$  への写像で、1 変数関数  $y = f(x)$  は、実直線  $\mathbb{R}$  の部分集合から  $\mathbb{R}$  への写像である。

例 4

$n=1, m=2$  のとき、 $\mathbb{R}$  の区間  $I$  から  $\mathbb{R}^2$  への写像  $t \mapsto (f(t), g(t))$  は、 $f(t), g(t)$  が  $t$  についての連続関数であれば、 $t$  でパラメータ表示された、平面内の連続曲線を表している。

これは、 $\mathbb{R}^2$  の弧 (p. 174, 定義 1-4) に他ならない。 $m=3$  として、 $\mathbb{R}$  の区間  $I$  から  $\mathbb{R}^3$  への写像  $t \mapsto (f(t), g(t), h(t))$  についても同様に、 $f(t), g(t), h(t)$  が  $t$  についての連続関数ならば、これは  $t$  でパラメータ表示された、空間内の連続曲線を表している。

\* 部分分数分解を通じ、いかなる有理関数も有理関数と対数関数、および逆三角関数を用いて積分できることを学ぶ。

分母は  $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$  と因数分解される。

そこで、 $\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$  とおいて  $a, b$  を求めると、

$a=2, b=-1$  と計算される。よって、求める部分分数分解は

$$\frac{x+5}{x^2+x-2} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

例 2

$f(x) = \frac{x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 - x - 2}{x^4 - x^3 - x + 1}$  を部分分数分解しよう。

分子の次数が分母の次数より大きいので、分子を分母で割り算して

$$\frac{x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 - x - 2}{x^4 - x^3 - x + 1} = x + \frac{3x^3 - 2x^2 - 2x - 2}{x^4 - x^3 - x + 1}$$

と計算される。

分母は  $x^4 - x^3 - x + 1 = (x-1)^2(x^2 + x + 1)$  と因数分解されるので

$$\frac{3x^3 - 2x^2 - 2x - 2}{x^4 - x^3 - x + 1} = \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \frac{c}{(x-1)} + \frac{d}{(x-1)^2}$$

とおいて  $a, b, c, d$  を求めると、 $a=b=1, c=2, d=-1$  と計算される。よって、求める部分分数分解は

$$\frac{x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 - x - 2}{x^4 - x^3 - x + 1} = x + \frac{x+1}{x^2+x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}$$

一般に、有理関数の不定積分を計算するには、部分分数分解 (p. 139, 定理 2-4) より、定理 2-4 の (i), (ii), (iii) のそれぞれの形の関数について不定積分を求めればよい。

(i) 多項式関数の不定積分については、すでに述べた。

(ii)  $\int \frac{k dx}{(x+a)^n} = k \int \frac{dx}{(x+a)^n}$  ( $a, k \in \mathbb{R}$ ) は、例題 1 (p. 136) より

$$\int \frac{k dx}{(x+a)^n} = \begin{cases} \frac{k}{(1-n)(x+a)^{n-1}} & (n \geq 2) \\ k \log|x+a| & (n=1) \end{cases}$$

(iii) 最後に  $\frac{ex+d}{(x^2+bx+c)^m}$  ( $b, c, d, e \in \mathbb{R}, b^2-4c < 0, m \in \mathbb{N}$ ) について考

\*偏微分の項目においてつまづきやすい全微分について、多くの例を掲載し、抽象的な概念理解を補う工夫をした。

\*多変数関数の広義積分では、統計学で用いる正規分布の確率密度関数であるガウス積分にも言及した。

以下  
の定理が示すように、連続である。

### 定理 1-1 全微分可能性と連続性

関数  $f(x, y)$  が  $(x, y) = (a, b)$  で全微分可能ならば、 $(x, y) = (a, b)$  で連続である。

**証明** 定理 1-1 の仮定により、定義 1-1 の式

$$f(x, y) = f(a, b) + m(x-a) + n(y-b) + o(d(P, X))$$

$$((x, y) \rightarrow (a, b))$$

が成り立つ。この両辺を、そのまま  $(x, y) \rightarrow (a, b)$  で極限をとると

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b) \text{ が導かれる。}$$

これは関数  $f(x, y)$  が  $(x, y) = (a, b)$  で連続であることを示している。 ■

前項目の最後で注意したように、一般に、偏微分係数が存在するだけでは、全微分可能であるとは限らない。次の例が、その反例を与えている。

例 2

p. 184, 5章 ② 例題 3 の、 $\mathbb{R}^2$  で定義された

$$\text{関数 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

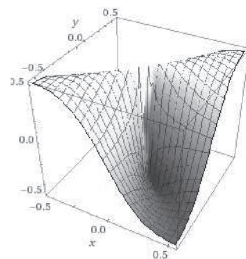
を考える。 $y=mx$  として  $x \rightarrow 0$  とすると、

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \frac{m}{1+m^2}$$

で、これは明らかに  $m$  に依存している。

よって、極限  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  は存在しないので、関数  $f(x, y)$  は原点  $(0, 0)$  で連続ではない。

定理 1-1 の対偶により、関数  $f(x, y)$  は原点  $(0, 0)$  で全微分可能でない。しかし、 $f(x, 0) \equiv 0$  なので、偏微分係数  $f_x(0, 0)$  は存在し、 $f_x(0, 0) = 0$  である。同様に、 $f(0, y) \equiv 0$  なので、偏微分係数  $f_y(0, 0)$  は存在し、 $f_y(0, 0) = 0$  である。



$$\iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

**解答**  $K_n = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq n, 0 \leq y \leq n\}$  とすると、 $\{K_n\}$  は  $D$  の近似列である。

$$I_n = \iint_{K_n} \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \int_0^n \frac{dx}{1+x^2} \int_0^n \frac{dy}{1+y^2}$$

$$= \left[ \tan^{-1} x \right]_{x=0}^{x=n} \times \left[ \tan^{-1} y \right]_{y=0}^{y=n} = (\tan^{-1} n)^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \left( \frac{\pi}{2} \right)^2 = \frac{\pi^2}{4} \text{ なので}$$

$$\iint_D \frac{dxdy}{(1+x^2)(1+y^2)} = \frac{\pi^2}{4} \quad \blacksquare$$

**練習 1** 次の広義積分の値を求めよ。

- (1)  $\iint_D e^{-y^2} dxdy, D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y\}$   
(ヒント:  $K_n = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq n\}$  とする。)
- (2)  $\iint_D \frac{\log(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy, D = \{(x, y) \mid 0 < x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\}$   
(ヒント:  $K_n = \{(x, y) \mid \frac{1}{n^2} \leq x^2+y^2 \leq 1, y \geq 0\}$  とする。)

### ◆ ガウス積分

広義の重積分を用いてしばしば計算される、次の 1 変数の広義積分は、自然科学や工学など幅広い範囲で応用される。重要性の高いものである。

例題 2

(ガウス積分) 等式  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  を証明せよ。

**指針**  $e^{-x^2}$  は偶関数なので、求める積分は  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  の 2 倍である。

これを計算するために、次の広義重積分を考える。

$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dxdy, D = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0\} \quad (*)$$

まず、 $K_n = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq n^2\}$  として、 $D$  の近似列  $\{K_n\}$  を考える。

\*微分方程式は自然科学や工学への応用に利用価値がある。  
フックの法則はその代表例の一つである。

例  
2

## 単振動

図2のようなバネの運動を考えると、フックの法則により

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

( $m$ はおもりの質量,  $k$ はバネ定数) という微分方程式が立つ。

これは p. 334, 定理 2-6 のべき指数が 1 の場合の微分方程式であり, その一般解は

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \quad (A, B \text{ は定数})$$

という形になる。

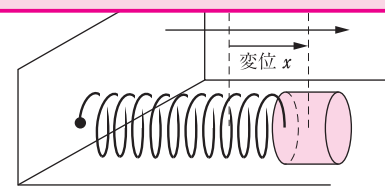


図2 バネによる振動

例題  
1

次の微分方程式を解け。

$$y''' + y'' + y' - 3y = 0$$

解答

$F(t) = t^3 + t^2 + t - 3$  とすると, 題意の微分方程式は  $F(D)y = 0$  である。

$F(t) = (t-1)(t^2+2t+3)$  と因数分解されるので, 題意の一般解は  $(D-1)y=0$  の一般解と  $(D^2+2D+3)y=0$  の一般解の和に分解される (p. 332, 定理 2-4)。

p. 333, 定理 2-5 より, 前者は  $y = Ce^x$  ( $C$  は定数) である。

また, 定理 2-6 より, 後者は

$$y = Ae^{-x} \cos \sqrt{2} x + Be^{-x} \sin \sqrt{2} x \quad (A, B \text{ は定数})$$

である。

よって, 題意の微分方程式の一般解は次で与えられる。

$$y = Ce^x + Ae^{-x} \cos \sqrt{2} x + Be^{-x} \sin \sqrt{2} x \quad (A, B, C \text{ は定数}) \quad \blacksquare$$

練習  
2

次の微分方程式を解け。

$$(1) \quad y''' - 6y'' + 2y' + 36y = 0$$

$$(2) \quad y^{(5)} - y^{(4)} - 2y''' + 2y'' + y' - y = 0$$

$$(3) \quad y^{(4)} - 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$$

\*第3章で学んだ有限テイラー展開と有限マクローリン展開を, 整級数として扱う。

第3章 4 (p. 120) では, 有限テイラー展開と有限マクローリン展開について学んだ。収束する整級数の概念を用いると, これらを無限項の級数へと拡張して, 整級数としてのテイラー展開・マクローリン展開を扱うことができる。この節では, 整級数の応用として, テイラー展開とマクローリン展開について解説する。

## ◆ テイラー展開とマクローリン展開

関数  $f(x)$  が  $x=a$  の近傍で何回でも微分可能である (すなわち  $C^\infty$  級である) とき,  $x=a$  を中心とした整級数

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} t^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots \end{aligned}$$

( $t=x-a$  とした) を考えることができる。この整級数が正の収束半径をもち, これが定める関数が  $x=a$  の近傍で  $f(x)$  と一致するとき, 関数  $f(x)$  は  $x=a$  でテイラー展開可能, あるいは解析的である といひ,

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$  を  $f(x)$  の  $x=a$  におけるテイラー展開 といひ。

$a=0$  のときのテイラー展開は マクローリン展開 と呼ばれる。

例  
1

$x=a$  を中心とした整級数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  が正の収束半径  $r$  をもつとし,

これが開区間  $(a-r, a+r)$  上に定める関数を  $f(x)$  とする。

系 2-2 (p. 308) より  $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) である。

よって,  $f(x)$  は  $x=a$  でテイラー展開可能であり,  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$  がその  $x=a$  におけるテイラー展開を与える。

## ◆ 指数関数と三角関数

次の補題は, 様々な関数がテイラー展開可能であることを示す上で便利である。

補題 3-1  $x=0$  の近傍で  $C^\infty$  級の関数  $f(x)$  と正の実数  $r$  について, 次の条件が満たされるとする。

本節では、座標平面上の点を同じ平面上に移す写像の考え方から、その特別の場合であり、 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と式で表すことができる1次変換について、基本的な性質や幾何学的な雰囲気と、この式が表すことの意味をある程度把握できるようになることを目指す。

1次変換は上述のように行列を含んだ式で表すことができる。行列については第1章で解説するが、ここではこの式が意味することを「何となく」でも理解できるようになることを目指す。ここで扱う1次変換と、第1章で扱う行列は密接に関係するので、事前に第1章の①、②を読んでおくとよい。

また、写像については、微分積分においても、高次関数などを含む多変数関数の一般論を扱う際に学習する。

### ◆写像

2つの集合  $X$ ,  $Y$  において、 $X$ のどの要素にも、 $Y$ の要素が1つずつ対応しているとき、この対応を  $X$  から  $Y$  への<sup>しゃぞう</sup>写像 といい、 $f$  などの記号を用いて

$$f: X \rightarrow Y$$

と書く。また、この写像  $f$  で、 $X$ の要素  $a$  に  $Y$ の要素  $b$  が対応しているとき、 $b$  は写像  $f$  による  $a$  の<sup>そう</sup>像 であるといい、以下のように書く。

$$f(a) = b \quad \text{または} \quad f: a \mapsto b$$

集合  $X$  から  $X$  自身への写像を、 $X$  上の<sup>へんくわん</sup>変換 という。座標平面上の点全体の集合を  $E$  で表す。 $E$  上の変換によって、点  $P(x, y)$  が点  $P'(x', y')$  に移るとき、すなわち変換  $f$  による  $P$  の像が  $P'$  であるとき、この変換を以下のように書く。

$$f: (x, y) \mapsto (x', y')$$

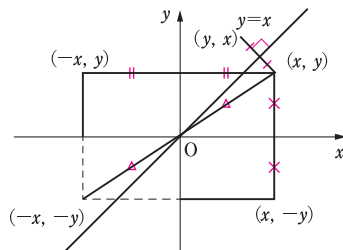
$x$  軸、 $y$  軸、原点、直線  $y=x$  に関する対称移動をそれぞれ  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $k$  とすると、これらは次のように表される  $E$  上の変換である。

$$f: (x, y) \mapsto (x, -y)$$

$$g: (x, y) \mapsto (-x, y)$$

$$h: (x, y) \mapsto (-x, -y)$$

$$k: (x, y) \mapsto (y, x)$$



**注意** 写像については、第6章①で更に詳しくまとめる。

### ◆行列とは

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

いくつかの数、数式を左のように長方形に並べたものを<sup>せいぶん</sup>行列 といい、その各々の数を、この行列の<sup>ようそ</sup>成分 または 要素 という。

第  $i$  行 (上から  $i$  番目の行) と第  $j$  列 (左から  $j$  番目の列) の交わる場所に置かれている数を  $i$ - $j$  成分 または  $i$ - $j$  要素 といい、 $a_{ij}$  のように表す。

$n$  次の正方行列  $A = (a_{ij})$  の  $a_{11}$ ,  $a_{22}$ ,  $\dots$ ,  $a_{nn}$  を  $(i, i)$  成分 対角成分 という。下に示すように、行と列についてそれぞれの文字の成り立ちから、行は「横の棒があるので横の並び」、列は「縦の棒があるので縦の並び」と覚えることもできる。

|     |                                       |                            |                                                        |
|-----|---------------------------------------|----------------------------|--------------------------------------------------------|
| 第1行 | $\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}$ | 行 $\rightarrow i$ 行 (横の並び) | $a_{ij}$                                               |
| 第2行 | $\begin{bmatrix} c & d \end{bmatrix}$ | 列 $\rightarrow j$ 列 (縦の並び) | *添え字の示す前の $i$ が行、後の $j$ が列。<br>$a_{mn}$ など添え字が異なっても同じ。 |
|     | 第1列<br>第2列                            |                            |                                                        |

一般に、行列は次のように定義できる。

#### 定義 1-1 行列

|                                                                                                                                                                                  |                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ | $m \times n$ 個の実数を長方形に並べた左のようなものを $m \times n$ 行列 ( $m, n$ ) 型行列 $m$ 行 $n$ 列の行列 または 単に 行列 という。 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|

**注意** 0章で示した行列は ( ) で表したが、今後は [ ] で表すことにする。

### ◆行列の書き方

行列において、横の並びを 行、縦の並びを 列 とした。

\* 逆行列を求める行列の計算のアルゴリズムを学習する。

\* 簡約階段形に代表される行列の計算のアルゴリズムを使って連立1次方程式の解法を学習する。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

**練習 3**  $m \times l$  行列  $A$  と  $m \times n$  行列  $B$  を並べてできた  $m \times (l+n)$  行列  $[A \ B]$  が階段形ならば,  $A$  も階段形であることを示せ。

階段形の行列の中でも特別なものとして、次のものは重要である。

### 定義 2-2 簡約階段形

$m \times n$  行列  $A = [a_{ij}]$  が次の条件を満たすとき, 簡約階段形であるという。

- (E1)  $A$  は階段形である。  
 (E2) 主成分はすべて 1 である。  
 (E3) 各主列における主成分の上下の成分はすべて 0 である。

簡約階段形の行列は、**図 2** のようなものである。すなわち、簡約階段形の

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & c_1 & & c_2 & & & & c_r & & \\
 & & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \\
1 & \dots & & \boxed{1} & \dots & \boxed{0} & \dots & \dots & \boxed{0} & \dots & \dots & * \\
2 & \dots & & & & \boxed{1} & \dots & & \boxed{0} & \dots & \dots & * \\
\vdots & & & & & & & & \vdots & & & \\
r & \dots & & & & & & & \boxed{1} & \dots & \dots & *
\end{array}$$

図2 簡約階段形

行列は、まず階段形であって、その主成分(図2で赤色で書いた成分)はすべて1であり、かつ、主成分が属する列(主列)において、その主成分以外の成分はすべて0になっている。特に、主成分の上の成分(図2で陰影部で示した部分)も0になっていることに注意しよう。

## ◆ 逆行列と基本変形

定理 2-2 より, 任意の正則行列  $A$  は, 基本行列の積

$$A=Q_1Q_2\cdots Q_s \quad (*)$$

の形になっていることが明らかになった。ここで、各  $Q_k$  ( $k=1, 2, \dots, s$ ) は基本行列、すなわち、[1](#) で導入した  $P_{ij}$ ,  $P_i(c)$ ,  $P_{ij}(a)$  のいずれかの形をしている行列である。

式(\*)の右辺に単位行列 $E$ を補って、 $A=Q_1Q_2\cdots Q_sE$ とすると、これは次のことを表している。

- 行列  $A$  は、単位行列  $E$  に、 $Q_s$  に対応する基本操作を行い、その結果に  $Q_{s-1}$  に対応する基本操作を行い、以下これを繰り返して、 $Q_1$  に対応する基本操作までを行うことで得られる行列である。

ところで, 式(\*)より,

$$A^{-1} = Q_s^{-1} \dots Q_2^{-1} Q_1^{-1} \quad (**)$$

がわかる。**定理 2-1** より，基本行列の逆行列もまた基本行列である。また，その逆行列は，元の基本行列に対応する基本操作の逆操作に対応しているのであった。よって，式  $(**)$  は，（上と同様に，右辺に単位行列  $E$  を補って考えることで）次のように解釈できる。

- $A^{-1}$  は、単位行列  $E$  に、 $Q_1$  に対応する基本操作の逆操作を行い、その結果に  $Q_2$  に対応する基本操作の逆操作を行い、以下これを繰り返して、 $Q_s$  に対応する基本操作の逆操作までを行うことで得られる行列である。

以上より、次のことがわかった。

- 任意の正則行列  $A$  について、 $A$  を単位行列  $E$  から行基本変形によって構成する手順の逆の手順を、単位行列  $E$  から行くと、 $A$  の逆行列  $A^{-1}$  が得られる。

\*行列式は正方行列の性質を示す特別な値である。

## ② 行列式

この節では、行列式の定義を与え、その基本性質や、2次と3次の場合の計算方法などについて学ぶ。

### ◆行列式の定義

#### 定義 2-1 行列式

$n$  次正方行列  $A = [a_{ij}]$  に対して、

$$\sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} \quad (*)$$

で定まる数を、 $A$  の行列式 とい

$$\det(A), |A|, |a_{ij}|, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

などの記号で表す。

ここで、(\*) の  $\Sigma$  における  $\sigma$  は、 $n$  個の文字  $1, 2, \dots, n$  の置換全体を動く。

行列式の定義式 (\*) は、 $n$  個の文字  $1, 2, \dots, n$  の置換全体にわたる和なので、全部で  $n!$  個の項の和である。

**注意** 行列式の記号は  $|a_{ij}|$  などのように、絶対値の記号と混同されやすいので注意が必要である。行列式は絶対値とは関係がなく、また、負の値も取り得る。特に  $n=1$  ( $A=[a_{11}]$ ) のときの行列式は  $a_{11}$  の絶対値ではなく、 $a_{11}$  そのものである。したがって、 $|a_{11}|$  で  $1 \times 1$  行列  $[a_{11}]$  の行列式を表すことは避けるべきである。また、 $\det$  はディターミナントと読む。

#### 例

1

$n=2$  の場合、 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  の行列式は、 $2!=2$  個の置換

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

にわたる和であり、前者の符号が 1、後者の符号が  $-1$  なので

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

となる。

### ◆ベクトル空間

以上、列ベクトル、数列、関数の例を述べたが、それらの全体は各々共通の構造 [1]~[3] をもっている。そして、この構造をもっているということが、 $K$  上のベクトル空間という概念の意味である。

すなわち、ベクトル空間は、次のように定義される。

#### 定義 1-1 ベクトル空間

集合  $V$  に、次のような構造が定まっているとする。

- [1]  $V$  の任意の 2 つの要素  $v, w$  に対して、和と呼ばれる第三の要素  $v+w$  が、 $V$  の中に定まっている。
- [2]  $V$  の任意の要素  $v$  と、 $K$  の任意の要素  $c$  に対して、スカラー倍と呼ばれる第三の要素  $cv$  が、 $V$  の中に定まっている。
- [3] これらの演算 (和とスカラー倍) について、[p. 138](#) に列挙した条件 (V1)~(V8) が満たされている。

このとき、 $V$  を  $K$  上のベクトル空間 とい

ここで、[定義 1-1](#) の集合  $V$  は、さしあたってはどんな集合でもよいし、[1] と [2] における、和  $v+w$  やスカラー倍  $cv$  の定め方も、それらが  $V$  の中に収まってさえいれば、さしあたりどのようなものでもよい。ただし、これらに関して、[p. 138](#) の条件 (V1)~(V8) が適宜、満たされなければならないというのが、唯一の要請である。

逆に言えば、この条件さえ満たされれば、 $V$  の要素がなんであろうと、そして要素の和やスカラー倍がどのようなものであろうと、 $V$  は  $K$  上のベクトル空間である。

ベクトル空間  $V$  の各要素を、 $V$  のベクトル とい

前項まで述べた 3 つの例

- $n$  次の列ベクトル全体  $K^n$

\*ベクトル空間の考え方は、抽象度が高い。しかし、これを習得することで、行列やベクトルの具体的計算の概念や意味を議論できるようになる。

\*線形写像を学習する意義からていねいに解説してゆく。

## 1 線形写像

この節では、線形写像を定義し、その基本的な性質や、それにまつわる基本的な事実などについて学ぶ。

### ◆線形写像を学ぶ意義

第0章では、平面上のベクトルの変換で、2次正方行列 $A$ を用いて

$$v \mapsto f(v) = Av$$

という形の変換について述べた。 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  ならば、これは

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

というものである。ここでは、変換 $f$ によって、平面上の位置ベクトルが、どこに写されるのかという問題が、興味の対象である。1次変換や、その一般化である線形写像は、このように、ベクトルを他のベクトルに写す、ある種の写像である。

他方、この問題を逆向きに捉えて、平面上の定点  $b = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$  について、「 $f$ で $b$ に写されるような点  $x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  を求めよ」という問題を考えると、これは連立1次方程式

$$Ax = b \quad \text{すなわち} \quad \begin{cases} ax+by=k \\ cx+dy=l \end{cases}$$

を解く問題になる。

すなわち、ある点がある点に写す変換という、幾何学的で動的な問題設定は、少し見方を変えることで、連立1次方程式の問題に直結しているのである。「変換」の問題と「方程式」の問題という、一見関係のなさそうなことが、ここでは「1次変換」あるいは「線形写像」という概念のもとに、統一的に見ることができる状況が与えられている。このことは、ベクトル空間の概念や、その間の線形写像の概念を用いれば、「変換」と「方程式」を、必要に応じて行き来できること、すなわち、幾何的・図形的な変換の考え方や直観を用いて、連立1次方程式の解法を理解したり、逆に、連立1次方程式について、すでに知っていることを

使って、より高度な変換の状況を理解したりできることを意味している。

ここでは幾何的な「変換」というテーマと、連立1次方程式というテーマを例として挙げたが、線形写像の概念が包括することのできるテーマは、これらだけには止まらない。非常に広い具体的な問題が、ベクトル空間や線形写像による簡素な問題に翻訳できる。その意味で、線形写像の一般論について習熟しておくことは、これらの広い応用に対して、強力な道具を習得することを意味するわけである。

### ◆写像

線形写像とは、ベクトル空間の間の写像で、「線形性」と呼ばれる条件を満たすものである。本書では、すでに第0章で、写像の概念について、主に平面上の1次変換に関連して簡単に触れた。以下では、写像に関する用語や概念が、さらにいくつか必要となるので、最初にこれらについて手短かにまとめておこう。

$f: X \rightarrow Y$  を写像とする。ここで $X$ は写像 $f$ の**定義域**といい、 $Y$ は写像 $f$ の**終域**という。また、 $x$ が集合 $X$ の要素であるとき、 $f(x)$ を $x$ の**像**という。 $x$ が定義域 $X$ を動くときの、その像の全体

$$\{f(x) \mid x \in X\}$$

を、写像 $f$ の**値域**という。写像 $f$ の値域は、終域 $Y$ の部分集合である。

**注意** 関数とは、写像の特別な例である。例えば、実数全体で定義された(実数値をとる)関数とは、写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  のことである。

集合 $X$ から集合 $Y$ への2つの写像  $f: X \rightarrow Y$ ,  $g: X \rightarrow Y$  が与えられたとき、それらが(写像として)**等しい**とは、 $X$ のすべての要素について、その像が等しいことである。すなわち、任意の  $x \in X$  について、 $f(x) = g(x)$  であることである。写像 $f$ と写像 $g$ が等しいことを、(通常のように)  $f = g$  と書く。

$f: X \rightarrow Y$  を写像とする。 $X$ の部分集合  $S \subset X$  について、 $x$ が $S$ を動くときの、その像の全体  $\{f(x) \mid x \in S\}$  を、写像 $f$ による $S$ の**像**といい、しばしば  $f(S)$  と書く。これらもまた、 $f$ の終域 $Y$ の部分集合である。例えば、 $f(X)$  とは $f$ の値域のことである。

$Y$ の部分集合  $T \subset Y$  について、 $f(x)$ が $T$ に入るような $x$ の全体  $\{x \in X \mid f(x) \in T\}$  を、写像 $f$ による $T$ の**逆像**といい、しばしば  $f^{-1}(T)$  と書く。

\*固有値と固有空間に関する議論は、広く自然科学の諸分野への応用に活かすことができる。

カラー $\lambda$ について、 $V$ の部分集合  $W_\lambda$  を  $W_\lambda = \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$  で定める。

練習

1

$W_\lambda$  は、 $V$ の部分空間であることを示せ。

+1ポイント

$W_\lambda$  は  $(\varphi - \lambda \text{id}_V)(v) = \varphi(v) - \lambda v$

で定まる1次変換  $(\varphi - \lambda \text{id}_V) : V \rightarrow V$  の核である。

このことから、 $W_\lambda$  が  $V$ の部分空間であることがわかる。

### 定義 1-1 固有値と固有ベクトル

$W_\lambda \neq \{0\}$  であるとき、すなわち、 $\varphi(v) = \lambda v$  を満たす零ベクトルでないベクトル  $v$  が存在するとき、 $\lambda$  を1次変換  $\varphi$  の固有値という。

また、このとき、 $V$ の部分空間  $W_\lambda$  を、1次変換  $\varphi$  の固有値  $\lambda$  に対する固有空間といい、 $W_\lambda$  に属する零ベクトルでないベクトルを、1次変換  $\varphi$  の固有値  $\lambda$  に対する固有ベクトルという。

すなわち、 $\varphi(v) = \lambda v$  を満たす零ベクトルでないベクトル  $v$  が存在する場合、 $\lambda$  は固有値であり、 $v$  は  $\lambda$  に対する固有ベクトルである。

例

1

$V$  を  $V \neq \{0\}$  なるベクトル空間とする。

- (1) 恒等変換  $\text{id}_V$  は1を固有値にもち、 $V$ に属する零ベクトルでないすべてのベクトルは、 $\text{id}_V$  の固有値1に対する固有ベクトルである。
- (2) 零写像  $0 : V \rightarrow V^a$  は0を固有値にもち、 $V$ に属する零ベクトルでないすべてのベクトルは、 $\text{id}_V$  の固有値0に対する固有ベクトルである。

練習

2

$\lambda, \mu$  を、1次変換  $\varphi$  の相異なる ( $\lambda \neq \mu$ ) 固有値とし、 $W_\lambda, W_\mu$  を、それぞれ  $\lambda, \mu$  に対する固有空間とする。このとき、 $W_\lambda \cap W_\mu = \{0\}$  であることを示せ。

a) すなわち、 $V$ のすべてのベクトルを0に写す1次変換。

\*ジョルダン標準形の計算は到達点。

1

$$N_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

すなわち、 $N_m$  は対角成分の1つ右上の成分がすべて1で、その他の成分はすべて0であるような行列である。このとき、 $N_m^m = 0$  かつ  $N_m^{m-1} \neq 0$  であることを示せ。

解答

$m$  次正方行列  $N_m$  で決まる、 $K^m$  上の1次変換  $\varphi_{N_m} : K^m \rightarrow K^m$  を考える。 $K^m$  の標準基底  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  について

$$\varphi_{N_m}(e_i) = \begin{cases} 0 & (i=1) \\ e_{i-1} & (i>1) \end{cases}$$

よって、すべての  $i=1, 2, \dots, m$  について

$$\varphi_{N_m}^m(e_i) = 0$$

である。これは  $N_m^m = 0$  であることを示している。しかし

$$\varphi_{N_m}^{m-1}(e_m) = e_1$$

なので、 $N_m^{m-1} \neq 0$  である。■

練習

2

$A, B$  が  $n$  次のべき零行列で、互いに可換である、すなわち  $AB=BA$  であるとする。このとき、 $A+B$  もべき零行列であることを示せ。(ヒント：第8章 [3] 練習4を用いよ。)

### ◆ジョルダン標準形定理

$\lambda \in K$  について、次の形の  $m$  次正方行列を、固有値  $\lambda$  の  $m$  次ジョルダン細胞といい、 $J(\lambda, m)$  で表す。

$$J(\lambda, m) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

## 重要 例題 005 高校数学 数列の極限の性質

★★☆

2以上の自然数 $n$ について、 $\sqrt[n]{n}=1+a_n$ とおく。

(1) 不等式  $0 < a_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$  を示せ。

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$  を求めよ。

指針 高校数学の復習問題である。

(1)  $\sqrt[n]{n}=1+a_n$  の両辺を $n$ 乗して、次の二項定理の展開式を利用する。

二項定理 (高校数学Ⅱ)  $(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

$\binom{n}{r} = {}_nC_r$  であり、本問は  $a=1$ ,  $b=a_n$  の場合。  $\binom{n}{r} > 0$ ,  $a_n > 0$  に着目する。

(2) 与えられた漸化式を変形して、一般項 $a_n$ を $n$ の式で表すのは難しい。そこで、(1)で示した不等式を利用し、はさみうちの原理を利用して極限を求める。

はさみうちの原理 すべての自然数 $n$ について  $p_n \leq a_n \leq q_n$  のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \alpha \text{ ならば } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

これは、不等式  $p_n \leq a_n \leq q_n$  の不等号において、等号がなくても成立する。

CHART 求めにくい極限 不等式利用で はさみうち

解答 (1)  $n \geq 2$  に対して、 $\sqrt[n]{n} > 1$  であるから  $a_n > 0$   
また、 $n \geq 2$  に対して、 $n = (1+a_n)^n$  であるから、二項定理により

$$(1+a_n)^n = \binom{n}{0} a_n^0 + \binom{n}{1} a_n^1 + \binom{n}{2} a_n^2 + \cdots + \binom{n}{n} a_n^n$$

$$> \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$$

よって、 $n > \frac{n(n-1)}{2} a_n^2$  だから  $a_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$

以上から  $0 < a_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$  ■

(2)  $n \geq 2$  のとき、(1)から  $1 < \sqrt[n]{n} = 1+a_n < 1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right) = 1 \text{ だから } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\leftarrow 1+a_n > 1 \text{ から } a_n > 0$$

$$\leftarrow (\sqrt[n]{n})^n = (1+a_n)^n$$

$$\text{すなわち } n = (1+a_n)^n$$

$$\leftarrow \binom{n}{r} a_n^r > 0 \text{ から。}$$

$$\leftarrow n > \frac{n(n-1)}{2} a_n^2 \text{ から}$$

$$a_n^2 < \frac{2n}{n(n-1)} = \frac{2}{n-1}$$

$$a_n > 0, \frac{2}{n-1} > 0 \text{ から}$$

$$a_n < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

$$\leftarrow 1 < a_n < q_n \text{ で}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 1$$

はさみうちの原理により  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

\*  $\varepsilon - \delta$  論法は、独特の記述形式について、関数の収束の定義に従って正しく議論した。

基本 例題 030  $\varepsilon - \delta$  論法による等式の証明

★★☆

次の等式を、 $\varepsilon - \delta$  論法を用いて証明せよ。

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1} (5x-3) = 2$

(2)  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2+1) = 2$

基本 029

指針

(1), (2)とも、左辺の極限値は存在して、右辺と一致することは、すぐにわかる。そのことを $\varepsilon - \delta$  論法を用いて証明せよとあるから、関数の収束の定義を今一度確認しておこう。

定義 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対して、ある正の実数 $\delta$ が存在して、 $f(x)$ の定義域内の  $0 < |x-a| < \delta$  であるすべての $x$ について  $|f(x)-\alpha| < \varepsilon$  となるとき、関数 $f(x)$ は  $x \rightarrow a$  で $\alpha$ に収束するという。

- (1) 証明すべきことは、「任意の正の実数 $\varepsilon$ に対して、ある正の実数 $\delta$ が存在して、  
 $0 < |x-1| < \delta$  であるすべての $x$ について  $|5x-3-2| < \varepsilon$  が成り立つ。」である。  
 $|5x-3-2| = 5|x-1|$  により、 $|x-1| < \delta$  ならば  $5|x-1| < 5\delta$  であることを利用すればよい。
- (2) 証明すべきことは、「任意の正の実数 $\varepsilon$ に対して、ある正の実数 $\delta$ が存在して、  
 $0 < |x+1| < \delta$  であるすべての $x$ について  $|x^2+1-2| < \varepsilon$  が成り立つ。」である。  
 $|x^2+1-2| = |(x+1)(x-1)| = |x+1||x-1|$  であり、これの絶対値を抑えたい。 $x$ の収束先は $-1$ なので、基本的には $x$ は $-1$ に近い状況のみを考えればよく、例えば  $|x+1| < 1$  すなわち  $-2 < x < 0$  であれば  $|x-1| < 3$  である。  
したがって $\delta$ を1より小さくしておけば、 $|x+1| < \delta$  であれば特に  $|x+1| < 1$  でもあって、このとき  $|x^2+1-2| = |x+1||x-1| < 3|x+1| < 3\delta$  となる。これを利用すればよい。

CHART  $\varepsilon - \delta$  論法  $\varepsilon$  が先,  $\delta$  が後

解答 (1) 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対して、 $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$  とする。このとき、

$$0 < |x-1| < \delta = \frac{\varepsilon}{5} \text{ であるすべての } x \text{ に対して}$$

$$|5x-3-2| = 5|x-1| < 5\delta = \varepsilon \text{ である。}$$

つまり  $\lim_{x \rightarrow 1} (5x-3) = 2$  であることが証明できた。■

(2) 任意の正の実数 $\varepsilon$ に対して、 $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\}$  とする。

このとき、 $0 < |x+1| < \delta$  であるすべての $x$ について、とくに  $|x+1| < 1$  であるから  $|x-1| < 3$  である。またこのとき

$$|x+1| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ でもあり、したがって、}$$

$$|x^2+1-2| = |x+1||x-1| < 3 \times \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

となる。つまり  $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2+1) = 2$  であることが証明できた。■

◀ 与式の $x$ に1を代入すれば極限値が2であることはすぐにわかる。

◀ 指針にある通り、 $\delta$ は後の計算を見越して、 $\frac{\varepsilon}{5}$ としている。

◀ (1)と同様に、等式の極限値が2であることはすぐにわかる。

◀  $\delta$ は1か $\frac{\varepsilon}{3}$ の小さい方をとればよい。更に、指針にある通り、 $\delta$ は後の計算を見越して、 $\frac{\varepsilon}{3}$ としている。

\*実用性の高いロピタルの定理を使った極限の計算は、多くの問題を掲載した。

113

## 基本 例題 063 不定形 $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ の極限 ②

★★★

ロピタルの定理を用いて、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1}x}{\sqrt[3]{x}}$  を求めよ。

**指針** **定理** **ロピタルの定理**  $a$  を含む開区間  $I$  上で定義されている関数  $f(x)$ ,  $g(x)$  が微分可能であるとき、次の条件を満たすとする。

[1]  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$

[2]  $x \neq a$  であるすべての  $I$  の点  $x$  で  $g'(x) \neq 0$

[3] 極限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  が存在する。

このとき、極限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  も存在し  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  が成り立つ。

**解答**  $\lim_{x \rightarrow 0} \tan^{-1}x = 0$  かつ  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{x} = 0$  である。

ここで、 $(\tan^{-1}x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$  であり、

極限値  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan^{-1}x)'}{(\sqrt[3]{x})'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{1+x^2} = 0$  は存在

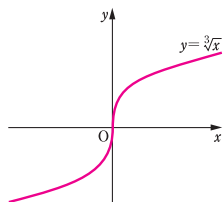
する。

これと  $x \neq 0$  で  $x^{\frac{2}{3}} \neq 0$ , ロピタルの定理より題意の極限値も存在して

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^{-1}x}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan^{-1}x)'}{(\sqrt[3]{x})'} = 0$$

**参考**  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  のグラフの原点における接線は  $y$  軸であり、傾き  $f'(0)$  は存在しない。そのため、この問題は次の節で学ぶ漸近展開を利用して解くことはできない。

このような場合でもロピタルの定理が有効なことに注意しておこう。上のように、計算自体はロピタルの定理を適用すれば容易に行うことができる。



◀ 定理の条件 [I]

◀ 定理の条件 [III]

\*新たに学習する広義積分については、適宜、図解し直観的な理解の手助けを図った。

177

## 基本 例題 091 広義積分の収束と発散

★★★

実数  $a$ ,  $k$  について、次の等式を示せ。ただし、 $a > 0$  とする。

(1)  $\int_a^\infty x^k dx = \begin{cases} -\frac{a^{k+1}}{k+1} & (k < -1) \\ \text{発散} & (k \geq -1) \end{cases}$

(2)  $\int_{-\infty}^a e^{kx} dx = \begin{cases} \frac{1}{k} e^{ka} & (k > 0) \\ \text{発散} & (k \leq 0) \end{cases}$

**指針** 無限区間に渡る広義積分は「積分の極限」として定義される。

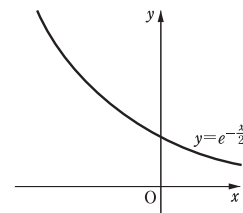
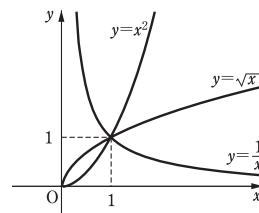
すなわち、半開区間  $[a, b)$  ( $a < b$ ) 上の連続関数  $f(x)$  について、極限値

$$\lim_{t \rightarrow b-0} \int_a^t f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

が存在するとき、広義積分  $\int_a^b f(x) dx$  が収束するという。

したがって、広義積分を求めるには、原則として、有限区間での積分を求めた後に極限をとれば良い (場合によっては、極限をとった後の値しか求まらないこともある)。

また、広義積分が収束するか発散するかを大雑把に把握するには、いくつかの場合にグラフをかいてみると良い。例えば、(1) が  $k > 0$  の場合に発散することや、(2) が  $k < 0$  の場合に発散することは、グラフから明らかである。



**解答** (1) [1]  $k = -1$  のとき

$b > a$  に対し  $\int_a^b \frac{dx}{x} = \log b - \log a \rightarrow \infty \quad (b \rightarrow \infty)$

[2]  $k \neq -1$  のとき

$$\int_a^b x^k dx = \left[ \frac{x^{k+1}}{k+1} \right]_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}$$

ここで、 $b \rightarrow \infty$  における極限を考えると、 $b^{k+1}$  は  $k+1 > 0$  のとき発散、 $k+1 < 0$  のとき 0 に収束する。よって、 $b \rightarrow \infty$  で

$$\int_a^\infty x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1} \rightarrow \begin{cases} -\frac{a^{k+1}}{k+1} & (k > -1) \\ \text{発散} & (k < -1) \end{cases}$$

以上をまとめて、求める結果を得る。 ■

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C$$

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad (a \neq -1)$$

\*一緒に解説されることの多い、連立1次方程式と行列の基本変形は、切り離し、それぞれを丁寧に扱った。

## 重要 例題 000 連立1次方程式とその解

☆☆☆

次の連立1次方程式を解け。

$$(1) \begin{cases} x + y + 2z - w = 3 \\ x - y + z - 3w = 4 \\ 2x - y - z + 2w = 4 \\ -x + 2y + 3z = -4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + 4y + z + 7w = 1 \\ -x - 2y - 3z - 6w = 7 \\ 3x + 6y - z + 8w = 9 \\ 2x + 4y + 3z + 9w = -5 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} -x + z + u + 2v = 1 \\ -x + 2y + z + 3v = 3 \\ 2x + y - 2z + 4v = -1 \\ 3x + 2y - 3z - u + 4v = -1 \end{cases}$$

**指針** 連立1次方程式は、次の定理を用いて解けばよい。

### 定理 (行基本変形と連立1次方程式)

$A$  を  $m \times n$  行列,  $b = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]$  を任意の定数項ベクトルとし, 連立1次方程式  $Ax = b$  ……(\*) が未知数ベクトル  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$  を解にもつとする。拡大係数行列  $[A | b]$  に行基本変形を施して,  $[B | b']$  ( $B$  は  $m \times n$  行列,  $b'$  は  $m \times 1$  行列) が得られたとき, 連立1次方程式  $Bx = b'$  は連立1次方程式(\*)と同値である(すなわち, 両者の解は一致する)。

また, 得られた解の候補がもとの連立方程式を満たすこと(十分性)の確認を忘れないこと。

**解答** (1) 題意の連立1次方程式は,  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ,  $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$  と

して,  $Ax = b$  と表される。

よって, その拡大行列は,  $[A | b] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & -4 \end{array} \right]$  である。

$[A | b]$  の簡約階段化を計算すると, 次のようになる。

$$[A | b] \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{2}-\textcircled{1} \\ \textcircled{3}-\textcircled{1} \times 2 \\ \textcircled{4}+\textcircled{1} \end{matrix}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & -5 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{3}+\textcircled{4}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \end{array} \right]$$

◀ 行基本変形していく各行列の行を上から順に①, ②, ③, ④としている。

$$\xrightarrow{\textcircled{3} \div (-3)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\textcircled{2}+\textcircled{3}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{2} \div (-2) \\ \textcircled{3}+\textcircled{4} \end{matrix}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{matrix} \textcircled{1}+\textcircled{2} \\ \textcircled{4}-\textcircled{2} \times 3 \end{matrix}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

よって, 題意の連立1次方程式は  $\begin{cases} x + z - w = 3 \\ y + z = 0 \quad \dots \dots (*) \\ z - 2w = 1 \end{cases}$  と同値である。

ここで,  $w = c$  ( $c$  は任意定数) とおくと  $\begin{cases} x = 2 - c \\ y = -2 - 2c \\ z = 1 + 2c \\ w = c \end{cases} \quad \dots \dots (**)$

逆に, 任意の  $c$  に対して, (\*\*) は (\*) を満たすから, 題意の連立1次方程式も満たす。

よって, (\*\*) が求める解である。

## 重要 例題 000 固有値と固有ベクトルと対角化



次の行列  $A$  の固有値および固有空間の基底を求めよ。また、対角化可能ならば対角化せよ。

$$(1) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(4) A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ -5 & -2 & -8 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -2 \\ 5 & 2 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

**指針**  $n$  次正方行列  $A$  に対し、 $t$  についての方程式  $\det(tE - A) = 0$  を行列  $A$  の **固有方程式** という。左辺を  $F_A(t) = \det(tE - A)$  とし、これを行列  $A$  の **固有多項式** という。行列  $A$  の固有値は、行列  $A$  の固有方程式  $F_A(t) = 0$  の解である。行列  $A$  の固有値  $\lambda$  が、固有方程式  $F_A(t) = 0$  のちょうど  $m$  重根であるとき、この  $m$  を固有値  $\lambda$  の **重複度** という。

また、対角化可能かどうかは次の定理により調べることができる。

**定理** (正方行列の対角化可能条件)

$n$  次正方行列  $A$  の固有方程式  $F_A(t)$  が、 $K$  上で  $F_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1}(t - \lambda_2)^{m_2} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$ ,  $\lambda_i \neq \lambda_j$  ( $i \neq j$ ) のように 1 次因子の積に分解されたとする ( $K = \mathbb{C}$  のときは、 $F_A(t)$  は必ずこのような 1 次因子の積に分解される)。すなわち、行列  $A$  の互いに相異なる固有値の全体は  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  であり、 $\lambda_i$  の重複度が  $m_i$  である ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) とする ( $F_A(t)$  の次数は  $n$  であるから、 $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = n$  である)。このとき、以下は同値である。

[1] 行列  $A$  は  $K$  上で対角化可能である。すなわち、 $K$  上の  $n$  次正則行列  $P$  が存在して、 $P^{-1}AP$  が対角行列になるようにできる。

[2] 各  $i = 1, 2, \dots, r$  について、固有値  $\lambda_i$  に対する固有空間を  $W_{\lambda_i}$  とするとき、 $\dim W_{\lambda_1} + \dim W_{\lambda_2} + \cdots + \dim W_{\lambda_r} = n$  が成り立つ。

すなわち、 $K^n = W_{\lambda_1} \oplus W_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus W_{\lambda_r}$  が成り立つ。

[3] 各  $i = 1, 2, \dots, r$  について、 $\dim W_i = m_i$  である。

また、行列  $A$  が対角化可能ならば、その対角化  $P^{-1}AP$  の対角成分には、各  $i = 1, 2, \dots, r$  について、固有値  $\lambda_i$  はちょうど  $m_i$  個並ぶ。

**解答** (1) 行列  $A$  の固有方程式を  $F_A(t)$  とすると

$$F_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t & -1 & -2 \\ 2 & t-3 & -2 \\ 1 & -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)(t-3)$$

よって、行列  $A$  の固有値は 1, 2, 3 (いずれも重複度 1) である。

固有値 1, 2, 3 に対する固有空間を、それぞれ  $W_1, W_2, W_3$  とする。

固有空間  $W_1$  は同次連立 1 次方程式  $(A - E)\mathbf{x} = 0$  の解空間である。

行列  $A - E$  の簡約階段化は  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  であるから、その解は

$$\mathbf{x} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c \text{ は任意定数}) \quad \text{よって、} W_1 \text{ の基底は } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

固有空間  $W_2$  は同次連立 1 次方程式  $(A - 2E)\mathbf{x} = 0$  の解空間である。

行列  $A - 2E$  の簡約階段化は  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  であるから、その解は

$$\mathbf{x} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c \text{ は任意定数}) \quad \text{よって、} W_2 \text{ の基底は } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

固有空間  $W_3$  は同次連立 1 次方程式  $(A - 3E)\mathbf{x} = 0$  の解空間である。

行列  $A - 3E$  の簡約階段化は  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  であるから、その解は

$$\mathbf{x} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c \text{ は任意定数}) \quad \text{よって、} W_3 \text{ の基底は } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

また、 $\dim W_1 = 1, \dim W_2 = 1, \dim W_3 = 1$  であり、これらはそれぞれ固有値 1, 2, 3 の重複度に等しいから、行列  $A$  は対角化可能である。

実際、固有空間  $W_1, W_2, W_3$  の基底を並べた行列を、 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$  とすると、

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ となる。}$$

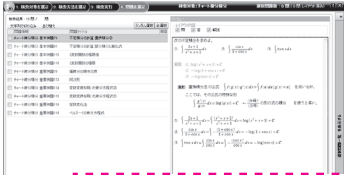
2020 年夏 発売予定

# Studyaid<sub>DB</sub> オンライン 大学微分積分 / 大学線形代数

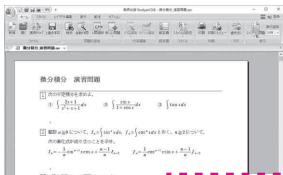
高校で定番のプリント作成ソフト Studyaid<sub>DB</sub> が大学向けに新登場！

書籍掲載の問題をデータベースとして収録し、検索するだけでプリント（配布物）が作成できます。数式編集や関数グラフ・図形作成ができるエディタも完備した、オールインワンの数学教材作成ソフトです。

1.検索
2.選択
3.編集
4.印刷



1問1問に細かな情報を付けて  
データベース化



専用フォントで  
美しい数式表現

## ＜収録例＞

次の重積分を計算せよ。

$$\iint_D x^3 y^2 dx dy, \quad D=[0, 1] \times [0, 1]$$

解答  $\frac{1}{12}$

解説

$$\iint_D x^3 y^2 dx dy = \int_0^1 \left( \int_0^1 x^3 y^2 dy \right) dx = \left( \int_0^1 x^3 dx \right) \cdot \left( \int_0^1 y^2 dy \right) = \left( \left[ \frac{1}{4} x^4 \right]_0^1 \right) \cdot \left( \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_0^1 \right) = \frac{1}{12}$$

| 商品名                                    | No.   | 価格                      | 収録内容                                                     |
|----------------------------------------|-------|-------------------------|----------------------------------------------------------|
| Studyaid <sub>DB</sub> オンライン<br>大学微分積分 | 99978 | 本体<br>15,000円＋税<br>(予備) | 「数研講座シリーズ大学教養微分積分」<br>「チャート式シリーズ大学教養微分積分」<br>の全問（約 280問） |
| Studyaid <sub>DB</sub> オンライン<br>大学線形代数 | 99979 | 本体<br>15,000円＋税<br>(予備) | 「数研講座シリーズ大学教養線形代数」<br>「チャート式シリーズ大学教養線形代数」<br>の全問（約 250問） |

高校向け商品もご購入いただけます。

|                                               |                    |                         |
|-----------------------------------------------|--------------------|-------------------------|
| No. 99219                                     | 標準価格 本体 21,000 円＋税 | アップグレード価格 本体 10,000 円＋税 |
| <b>Studyaid<sub>DB</sub></b> 数学入試 2019 データベース |                    |                         |

2019 年度大学入試問題から良問を精選し、約 1,500 問を収録しています。

|                                                         |                    |                         |
|---------------------------------------------------------|--------------------|-------------------------|
| No. 99623                                               | 標準価格 本体 60,000 円＋税 | アップグレード価格 本体 30,000 円＋税 |
| <b>Studyaid<sub>DB</sub></b> 数学入試 20 年（1996～2015）データベース |                    |                         |

数学入試 1996 データベースから数学入試 2015 データベースまでの 20 年分を 1 つにまとめたお得な商品です。

|                                                      |                    |                         |
|------------------------------------------------------|--------------------|-------------------------|
| No. 99558                                            | 標準価格 本体 29,000 円＋税 | アップグレード価格 本体 12,300 円＋税 |
| <b>Studyaid<sub>DB</sub></b> 改訂版チャート式データベース数学Ⅰ＋A 統合版 |                    |                         |
| No. 99564                                            | 標準価格 本体 29,000 円＋税 | アップグレード価格 本体 12,300 円＋税 |
| <b>Studyaid<sub>DB</sub></b> 改訂版チャート式データベース数学Ⅱ＋B 統合版 |                    |                         |
| No. 99574                                            | 標準価格 本体 29,000 円＋税 | アップグレード価格 本体 12,300 円＋税 |
| <b>Studyaid<sub>DB</sub></b> 改訂版チャート式データベース数学Ⅲ統合版    |                    |                         |

高校向けチャート式参考書

- ・改訂版チャート式数学（赤チャート）
- ・改訂版チャート式基礎からの数学（青チャート）
- ・改訂版チャート式解法と演習数学（黄チャート）
- ・改訂版チャート式基礎と演習数学（白チャート）の全問を収録しています。

アップグレード価格について

Studyaid D.B. 数学シリーズ商品をお持ちの場合は、標準価格と同一のものをアップグレード価格で購入していただけます。弊社ホームページからも申込み可能です。

そのほかのラインアップ、動作環境・購入方法など、詳しくは弊社ホームページへ

<https://www.chart.co.jp/stdb/>

## 数研出版の高校向け教材，一般書

チャート式をはじめとする数研出版の教材は，全国の高校で広くご採用いただいています。

### ■ 教科書



### ■ チャート式参考書



### ■ もういちど読む



### ■ チャート式復刻版



そのほかの商品は弊社ホームページをご覧ください。

<https://www.chart.co.jp/>

### 数研出版株式会社

東京本社

〒101-0052 東京都千代田区神田小川町 2 丁目 3 番地 3

関西本社

〒604-0861 京都市中京区烏丸通竹屋町上る大倉町 205 番地

TEL：075-231-0162（コールセンター）

<https://www.chart.co.jp/>



本冊子は  
植物油インキを使用しています。

本冊子で使用されている商品の写真は出荷時のものと一部異なる場合があります。  
本冊子に掲載されている仕様及び価格は予告なしに変更することがあります。  
本冊子の有効期限：2019 年 10 月現在のものです。  
本冊子の有効期限：2022 年 10 月 31 日  
返品に関する特約：商品に欠陥のある場合を除き、お客様の都合による商品の返品・交換はお受けできません。

152118