発展：ジョルダン標準形定理の証明

ここでは，まず，べき零変換によるベクトル空間の分解について述べ，それを用いて，到達点であるジョルダン標準形定理（教科書の *p.* 328，定理 1-3 および *p.* 333，定理 1-5）の証明を行う。これらの証明は，必ずしも知っておかなければならないというものではないが，これらの定理の深い理論的な理解を得たいと希望する読者のために行う。

◈べき零変換によるベクトル空間の分解

VをK上のn次元ベクトル空間とし，$\varphi : V \longrightarrow V$ をべき零変換とする。自然数mを，$\varphi^m=0$ かつ $\varphi^{m-1}\neq 0$ で定める。

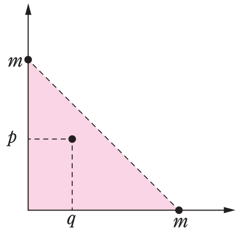

図 1　添字集合 J

この項では，べき零変換φによって引き起こされる，Vの部分空間の直和への分解について議論する。これらの部分空間は，$p\geqq 0$，$q\geqq 0$ かつ $p+q\leqq m$ であるような整数の組 (p, q) で番号付けされる。そこで，これら (p, q) の集合をJとしよう。

$$J=\{(p, q)\mid p\geqq 0, q\geqq 0, p+q\leqq m\}$$

Jの点は，図 1 の陰影部の格子点（座標が整数である点）である。

定理 1　べき零変換による直和分解

各 $(p, q)\in J$ で添字付けられた，Vの部分空間 V_{pq} が，次の条件を満たすようにとれる。

(a)　**任意のqについて，$V_{0q}=\{0\}$**

(b)　**Vはすべての V_{pq} の和に等しく，しかもこの和は直和である*)。**

$$V=\bigoplus_{(p,q)\in J} V_{pq}$$

(c)　**$p\geqq 1$ について $\varphi(V_{pq})\subseteqq V_{p-1,q+1}$ であり，$p>1$ ならば，V_{pq} にφを制限して得られたK上の線形写像 $\varphi : V_{pq}\longrightarrow V_{p-1,q+1}$ は同型写像である（*p.* 5，図 6 参照）。（$V_{0,q+1}=\{0\}$ なので，$p=1$ のときは，$\varphi : V_{1q}\longrightarrow V_{0,q+1}$ は零写像である。）**

*）式の右辺は，Jに属する (p, q) 全体にわたる直和を表す。

定理 1 の証明の前に，少し準備をしよう。

自然数 p について，$K_p=\mathrm{Ker}(\varphi^p)=\{\boldsymbol{v}\in V\mid\varphi^p(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}\}$ とする。$\varphi^p(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$ なら，$\varphi^{p+1}(\boldsymbol{v})=\varphi(\varphi^p(\boldsymbol{v}))=\varphi(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ であるから，$K_p\subseteqq K_{p+1}$ である。また，$\varphi^m=0$ なので，$K_m=V$ である。よって，部分空間の増大列

$$\{\boldsymbol{0}\}\subseteqq K_1\subseteqq K_2\subseteqq\cdots\cdots\subseteqq K_{m-1}\subseteqq K_m=V$$

ができる。(便宜上，$K_0=\{\boldsymbol{0}\}$ としておく。) また，K_{p+1} のベクトル $\boldsymbol{v}\in K_{p+1}$ について，$\varphi(\boldsymbol{v})\in K_p$ であるから，線形写像の列

$$V=K_m\xrightarrow{\varphi}K_{m-1}\xrightarrow{\varphi}\cdots\cdots\xrightarrow{\varphi}K_2\xrightarrow{\varphi}K_1\xrightarrow{\varphi}K_0=\{\boldsymbol{0}\}$$

ができる。

自然数 q について，$F_q=\varphi^q(V)=\{\varphi^q(\boldsymbol{v})\mid\boldsymbol{v}\in V\}$ とする。$\varphi^{q+1}(\boldsymbol{v})\in F_{q+1}$ なら，$\boldsymbol{w}=\varphi(\boldsymbol{v})$ として，$\varphi^{q+1}(\boldsymbol{v})=\varphi^q(\boldsymbol{w})$ であるから，$F_{q+1}\subseteqq F_q$ である。また，$\varphi^m=0$ なので，$F_m=\{\boldsymbol{0}\}$ である。よって，部分空間の減少列

$$V\supseteqq F_1\supseteqq F_2\supseteqq\cdots\cdots\supseteqq F_{m-1}\supseteqq F_m=\{\boldsymbol{0}\}$$

が得られた (便宜上，$F_0=V$ としておく)。また，F_p のベクトル $\varphi^p(\boldsymbol{v})$ について，$\varphi(\varphi^p(\boldsymbol{v}))\in F_{p+1}$ であるから，線形写像の列

$$V=F_0\xrightarrow{\varphi}F_1\xrightarrow{\varphi}F_2\xrightarrow{\varphi}\cdots\cdots\xrightarrow{\varphi}F_{m-1}\xrightarrow{\varphi}F_m=\{\boldsymbol{0}\}$$

ができる。

そこで

$$L_{pq}=K_p\cap F_q$$

とする。L_{pq} のベクトルはすべて $\varphi^q(\boldsymbol{v})$ という形をしており，しかも $\varphi^{p+q}(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$ を満たすものである。また，$V=L_{m0}$ である。φ は L_{pq} を L_{p-1q+1} に写す。よって

$$L_{p+q,0}\xrightarrow{\varphi}L_{p+q-1,1}\xrightarrow{\varphi}L_{p+q-2,2}\xrightarrow{\varphi}\cdots\cdots\xrightarrow{\varphi}L_{1,p+q-1}\xrightarrow{\varphi}L_{0,p+q}=\{\boldsymbol{0}\}$$

以下，定理の証明では，部分空間 V_{pq} は，次のような直和分解を与えるように構成される (図 2)。

$$K_p=\bigoplus_{(i,q)\in J,0\leqq i\leqq p}V_{iq},\quad F_q=\bigoplus_{(p,j)\in J,q\leqq j\leqq m}V_{pj}$$

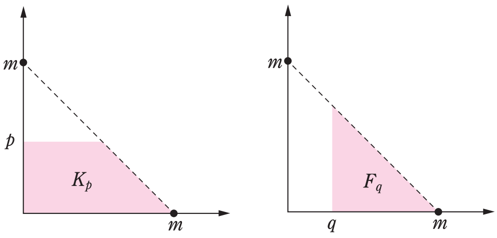

図 2　K_p と F_q

よって，特に

$$L_{pq}=\bigoplus_{\substack{(i,j)\in J\\ 0\leqq i\leqq p,q\leqq j\leqq m}} V_{ij}$$

である（図 3）。

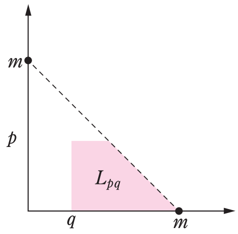

図 3　L_{pq}

定理 1 の 証明　いくつかの段階に分けて証明する。

第 1 段階. まず，任意の q $(0\leqq q\leqq m)$ について，$V_{0q}=\{\mathbf{0}\}$ とする（図 4 左）。

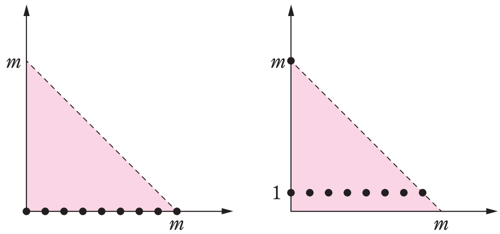

図 4　V_{0q} $(0\leqq q\leqq m)$ と V_{1q} $(0\leqq q\leqq m-1)$

第 2 段階. 次に，$0\leqq q\leqq m-1$ について V_{1q} を作ろう（図 4 右）。部分空間の増大列

$$\{\mathbf{0}\}=L_{1,m}\subseteqq L_{1,m-1}\subseteqq L_{1,m-2}\subseteqq\cdots\cdots\subseteqq L_{1,1}\subseteqq L_{1,0}=K_1$$

に注目して，

- $L_{1,m-1}$ の基底 $\{\varphi^{m-1}(\boldsymbol{v}_1),\ \varphi^{m-1}(\boldsymbol{v}_2),\ \cdots\cdots,\ \varphi^{m-1}(\boldsymbol{v}_{l_1})\}$ をとる。また，$V_{1,m-1}=L_{1,m-1}$ とする。
- これに $\{\varphi^{m-2}(\boldsymbol{v}_{l_1+1}),\ \varphi^{m-2}(\boldsymbol{v}_{l_1+2}),\ \cdots\cdots,\ \varphi^{m-2}(\boldsymbol{v}_{l_2})\}$ を追加して，$L_{1,m-2}$ の基底に延長する。また，$\{\varphi^{m-2}(\boldsymbol{v}_{l_1+1}),\ \varphi^{m-2}(\boldsymbol{v}_{l_1+2}),\ \cdots\cdots,\ \varphi^{m-2}(\boldsymbol{v}_{l_2})\}$ で生成される部分空間を $V_{1,m-2}$ とする。このとき，$L_{1,m-2}=V_{1,m-1}\oplus V_{1,m-2}$ である。
- これに $\{\varphi^{m-3}(\boldsymbol{v}_{l_2+1}),\ \varphi^{m-3}(\boldsymbol{v}_{l_2+2}),\ \cdots\cdots,\ \varphi^{m-3}(\boldsymbol{v}_{l_3})\}$ を追加して，$L_{1,m-3}$ の基底に延長する。また，$\{\varphi^{m-3}(\boldsymbol{v}_{l_2+1}),\ \varphi^{m-3}(\boldsymbol{v}_{l_2+2}),\ \cdots\cdots,\ \varphi^{m-3}(\boldsymbol{v}_{l_3})\}$ で生成される部分空間を $V_{1,m-3}$ とする。このとき，$L_{1,m-3}=V_{1,m-1}\oplus V_{1,m-2}\oplus V_{1,m-3}$ である。
- これを繰り返して，最後に $\{\boldsymbol{v}_{l_{m-1}+1},\ \boldsymbol{v}_{l_{m-1}+2},\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{v}_{l_m}\}$ を追加して，$L_{1,0}=K_1$ の基底に延長する。また，$\{\boldsymbol{v}_{l_{m-1}+1},\ \boldsymbol{v}_{l_{m-1}+2},\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{v}_{l_m}\}$ で生成される部分空間を $V_{1,0}$ とする。このとき，$L_{1,0}=V_{1,m-1}\oplus V_{1,m-2}\oplus\cdots\cdots\oplus V_{1,0}$ である。

(よって，$\dim V_{1,m-1}=l_1$，$\dim V_{1,m-2}=l_2-l_1$，$\cdots\cdots$，$\dim V_{1,0}=l_m-l_{m-1}$ である。)

以上で，$0\leqq q\leqq m-1$ について V_{1q} ができた。作り方から，$V_{1q}\subseteq L_{1q}$ が成り立つ。

第 3 段階. 次に，$1\leqq p\leqq m$ について V_{p0} を作る（図 5 左)。

$$V_{p0}=\langle\boldsymbol{v}_{l_{m-p}+1},\ \boldsymbol{v}_{l_{m-p}+2},\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{v}_{l_{m-p+1}}\rangle$$

すなわち，V_{p0} はベクトル $\boldsymbol{v}_{l_{m-p}+1},\ \boldsymbol{v}_{l_{m-p}+2},\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{v}_{l_{m-p+1}}$ で生成される部分空間とする。このとき，これらのベクトルを φ^{p-1} で写すと，$V_{1,p-1}$ の基底 $\{\varphi^{p-1}(\boldsymbol{v}_{l_{m-p}+1}),\ \varphi^{p-1}(\boldsymbol{v}_{l_{m-p}+2}),\ \cdots\cdots,\ \varphi^{p-1}(\boldsymbol{v}_{l_{m-p+1}})\}$ が得られるので，$\{\boldsymbol{v}_{l_{m-p}+1},\ \boldsymbol{v}_{l_{m-p}+2},\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{v}_{l_{m-p+1}}\}$ は 1 次独立であり（教科書の第 6 章定理 2-8 (1) 参照)，よって，V_{p0} の基底を与える。

また，$0<q<p-1$ なる自然数 q について

$$V_{p-q,q}=\varphi^q(V_{p0})$$

すなわち，$V_{q,p-q}$ を $\varphi^q(\boldsymbol{v}_{l_{m-p}+1}),\ \varphi^q(\boldsymbol{v}_{l_{m-p}+2}),\ \cdots\cdots,\ \varphi^q(\boldsymbol{v}_{l_{m-p+1}})$ で生成された部分空間とする（図 5 右）上と同様に，その生成系は φ^{p-q-1} で写すと $V_{1,p-1}$ の基底となるので 1 次独立であり，$V_{p-q,q}$ の基底を与える。

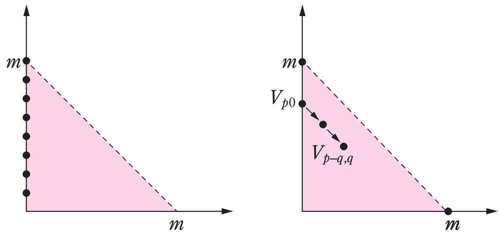

図 5　V_{p0} $(1 \leqq p \leqq m)$ と $V_{p-q,q}$ $(0 \leqq q \leqq p-1)$

第 4 段階. こうして，φ による同型の列

$$V_{p0} \xrightarrow[\varphi]{\sim} V_{p-1,1} \xrightarrow[\varphi]{\sim} V_{p-2,2} \xrightarrow[\varphi]{\sim} \cdots\cdots \xrightarrow[\varphi]{\sim} V_{2,p-2} \xrightarrow[\varphi]{\sim} V_{1,p-1}$$

ができた。これらの部分空間はすべて同型なので，その次元はすべて $\dim V_{1,p-1} = l_{m-p+1} - l_{m-p}$ に等しい。また，$V_{1,p-1} = L_{1,p-1} = K_1 \cap F_{p-1} \subseteqq K_1$ なので，φ は $V_{1,p-1}$ 上では 0 写像である。すなわち

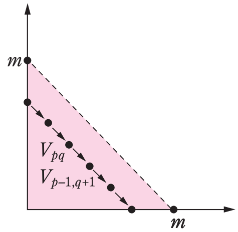

図 6　φ による同型（最後だけ零写像）の列

$$V_{p0} \xrightarrow[\varphi]{\sim} V_{p-1,1} \xrightarrow[\varphi]{\sim} V_{p-2,2} \xrightarrow[\varphi]{\sim} \cdots\cdots \xrightarrow[\varphi]{\sim} V_{2,p-2} \xrightarrow[\varphi]{\sim} V_{1,p-1} \xrightarrow[\varphi]{} \{\mathbf{0}\}$$

となる（図 6）。

第 5 段階. $\{V_{pq} \mid (p,\ q) \in J\}$ が定理の条件 (a), (b), (c) を満たすことを示す。(a) は構成より明らか（第 1 段階）であり，(c) は既に示されている（第 4 段階）。よって，(b) を示せばよい。そのためには

$$L_{pq} = \bigoplus_{\substack{(i,j) \in J \\ 0 \leqq i \leqq p,\, q \leqq j \leqq m}} V_{ij} \qquad (*)$$

であることを示せば十分である。実際，$L_{m0} = V$ なので，(b) は $(*)$ の特別な場合である。

$(\ast)$ の証明に先立って，次の事実を確認しておく：任意の $(p,\ q)\in J$ について，$V_{pq}\subseteqq L_{pq}$ が成り立つ。実際，上の作り方から，V_{pq} のベクトルは，すべて $\varphi^{q}(\boldsymbol{v})$ の形であるから，F_q に属する。また，第 3 段階での作り方から $V_{p+q,0}$ は φ^{p+q-1} によって K_1 の中に写されるので，$V_{p+q,0}$ の任意のベクトルは φ^{p+q} で $\mathbf{0}$ に写される。よって，V_{pq} のベクトルは K_p に入る。以上より，$V_{pq}\subseteqq K_p\cap F_q=L_{pq}$ である。

第 6 段階. q を $0\leqq q\leqq m$ で任意に固定して，直和分解 $(\ast)$ を自然数 p についての数学的帰納法で証明しよう。$p=1$ の場合は，第 2 段階での構成から，明らかに成り立つ。そこで $p>1$ として，$L_{p-1,q}$ が V_{ij} $((i,\ j)\in J,\ 0\leqq i\leqq p-1,\ q\leqq j\leqq m)$ の直和であると仮定しよう。

そこで

$$M_p=V_{pq}+V_{p,q+1}+\cdots\cdots+V_{p,m-p}$$

とする。示すべきことは，次の 2 点である。

[1]　和 $V_{pq}+V_{p,q+1}+\cdots\cdots+V_{p,m-p}$ は直和である。すなわち，

$M_p=V_{pq}\oplus V_{p,q+1}\oplus\cdots\cdots\oplus V_{p,m-p}$

[2]　$L_{pq}=L_{p-1,q}+M_p$ であり，この和は直和である。すなわち，

$L_{pq}=L_{p-1,q}\oplus M_p$

第 7 段階. まず，[1] を示す。そのために，教科書の第 5 章定理 1-4 の条件 (c) を確かめる。$\boldsymbol{v}_j\in V_{pj}$ $(q\leqq j\leqq m-p)$ について，$\boldsymbol{v}_q+\boldsymbol{v}_{q+1}+\cdots\cdots+\boldsymbol{v}_{m-p}=\mathbf{0}$ であるとする。これを φ で写すと，$\varphi(\boldsymbol{v}_j)\in V_{p-1,j+1}$ であり

$$\varphi(\boldsymbol{v}_q)+\varphi(\boldsymbol{v}_{q+1})+\cdots\cdots+\varphi(\boldsymbol{v}_{m-p})=\mathbf{0}$$

である。数学的帰納法の仮定から，$V_{p-1,j+1}$ $(q\leqq j\leqq m-p)$ の和は直和であったから，すべての j について $\varphi(\boldsymbol{v}_j)=\mathbf{0}$ である。しかし，φ は V_{pj} から $V_{p-1,j+1}$ への線形写像としては，同型写像である。よって，すべての j について $\boldsymbol{v}_j=\mathbf{0}$ となり，第 5 章定理 1-4 の条件 (c) が確かめられた。

第 8 段階. 次に，[2] を示す。任意の $\boldsymbol{v}\in L_{pq}$ について，$\varphi^{p-1}(\boldsymbol{v})$ を考える。$L_{pq}=K_p\cap F_q$ であったから，$\varphi^{p-1}(\boldsymbol{v})\in K_1\cap F_{p+q-1}=L_{1,p+q-1}$ である。第 2 段階での構成から，$L_{1,p+q-1}$ は $V_{1,p+j-1}$ $(q\leqq j\leqq m-p)$ の直和

$$L_{1,p+q-1}=V_{1,p+q-1}\oplus V_{1,p+q}\oplus\cdots\cdots\oplus V_{1,m-1}$$

であり，これは φ^{p-1} によって $M_p=V_{pq}\oplus V_{p,q+1}\oplus\cdots\cdots\oplus V_{p,m-p}$ と同型である（図

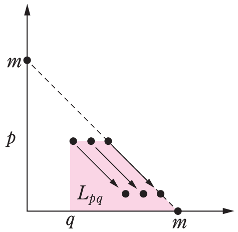

図 7　同型 $\varphi^{p-1}:M_p\xrightarrow{\sim}L_{1,p+q-1}$

7 参照)。

よって，$\boldsymbol{w}\in M_p$ で $\varphi^{p-1}(\boldsymbol{w})=\varphi^{p-1}(\boldsymbol{v})$ となるものが存在する。このとき，$\varphi^{p-1}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})=\boldsymbol{0}$ なので，$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\in K_{p-1}$ であるが，$M_p\subseteqq L_{pq}\subseteqq F_q$ なので，$\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}\in L_{p-1,q}$ である。よって，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}+(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w})$ という分解は，$\boldsymbol{v}\in M_p+L_{p-1,q}$ であることを示している。よって，$L_{pq}\subseteq M_p+L_{p-1,q}$ であるが，逆の包含関係は明らかなので，$L_{pq}=M_p+L_{p-1,q}$ である。

最後に，$M_p\cap L_{p-1,q}=\{\boldsymbol{0}\}$ を示す。$\boldsymbol{v}\in M_p\cap L_{p-1,q}$ とする。$\boldsymbol{v}\in L_{p-1,q}\subseteq K_{p-1}$ なので，$\varphi(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$ であるが，上で見たように，φ^{p-1} は M_p を $L_{1,p+q-1}$ に同型に写すので，$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$ である。よって，$M_p\cap L_{p-1,q}=\{\boldsymbol{0}\}$ が示された。

以上で [2] も証明され，定理 1 の証明が完了した。 ■

◈べき零行列のジョルダン標準形

前項で構成した，部分空間 V_{pq} (p，$q\in J$) への分解を用いると，定理 1-5 の特別な場合として，次の定理を証明することができる。

定理 2　べき零行列のジョルダン標準形

n 次正方行列 A が，べき零行列であるとする。このとき，n 次正則行列 P が存在して，$P^{-1}AP$ が次の形になる。

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} J(0,\ l_1) & & & \text{\huge 0} \\ & J(0,\ l_2) & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & J(0,\ l_r) \end{bmatrix}$$

(ただし，$l_1+l_2+\cdots\cdots+l_r=n$) 更に，$p=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ について，ここに現れる p 次のジョルダン細胞 $J(0,\ p)$ の個数は

$$\operatorname{rank} A^{p+1}-2\operatorname{rank} A^{p}+\operatorname{rank} A^{p-1}$$

に等しい。よって，特に，上の形はジョルダン細胞の並べ方を除いて，A だけで一意的に決まる。

証明　べき零変換 $\varphi=\varphi_A$ に対して，定理 1 の分解

$$K^n=\bigoplus_{(p,q)\in K} V_{pq}$$

をとる。各 $p=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$ について，V_{p0} の $\mathbf{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{v}$ がとれると，$\boldsymbol{K}$ 上 **1** 次独立な $\boldsymbol{p}$ 個のベクトル

$$\boldsymbol{v},\ A\boldsymbol{v},\ A^2\boldsymbol{v},\ \cdots\cdots,\ A^{p-1}\boldsymbol{v}$$

が得られ，$A^p\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ である。よって，これらのベクトルで生成される p 次元部分空間 W_p に A を制限すれば，基底 $\{A^{p-1}\boldsymbol{v},\ A^{p-2}\boldsymbol{v},\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{v}\}$ に関するその表現行列は

$$J(0,\ p)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & \text{\huge 0} & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & \text{\huge 0} & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

になる。

よって，この構成を，V_{p0} の適当な基底について行えば，ちょうど $b_p=\dim V_{p0}$ の分だけ，上のような p 次元部分空間

$$W_{p1},\ W_{p2},\ \cdots\cdots,\ W_{pb_p}$$

を構成することができて，そのそれぞれの上で，上と同様な基底 $\{A^{p-1}\boldsymbol{v},\ A^{p-2}\boldsymbol{v},\ \cdots\cdots,\ \boldsymbol{v}\}$ に関する A の表現行列が $J(0,\ p)$ になる。

以上を，$p=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$ について行えば，K^n の直和分解

$$K^n=\bigoplus_{p=1}^{m}(W_{p1}\oplus W_{p2}\oplus\cdots\cdots\oplus W_{pb_p})$$

が得られ，各 W_{pi} 上で上のような基底をとって並べて K^n の基底を作り，その基底変換の行列を P とすれば，$P^{-1}AP$ は，各 $p=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$ について，p 次のジョルダン細胞 $J(0,\ p)$ が b_p 個だけ対角ブロックに並んだブロック対角行列になる。したがって，$P^{-1}AP$ は題意の形の行列になる。

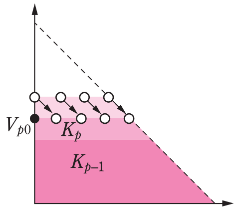

図 8　$\dim V_{p0}$ の計算

次に，p 次のジョルダン細胞の個数を計算しよう。上の構成からもわかるように，p 次のジョルダン細胞の個数は，$\dim V_{p0}$ に等しい。この次元の計算は，次のようにして行われる（図 8 参照）。

まず，$\dim K_p$ から $\dim K_{p-1}$ を引けば

$$V_{p0} \oplus V_{p1} \oplus \cdots\cdots \oplus V_{p,m-p}$$

の次元が求められる。ここで

$$V_{p1},\quad V_{p2},\quad \cdots\cdots,\quad V_{p,m-p}$$

は，φ によって

$$V_{p+1,0},\quad V_{p+1,1},\quad \cdots\cdots,\quad V_{p+1,m-p-1}$$

と，それぞれ同型なのであった（図 8 の白丸の部分）。$V_{p+1,0}$，$V_{p+1,1}$，$\cdots\cdots$，$V_{p+1,m-p-1}$ の直和の次元は，$\dim K_{p+1} - \dim K_p$ に等しいので，結局

$$\begin{aligned}\dim V_{p0} &= (\dim K_p . \dim K_{p-1}) - (\dim K_{p+1} - \dim K_p)\\ &= 2\dim K_p - \dim K_{p+1} - \dim K_{p-1}\end{aligned}$$

すなわち，p 次のジョルダン細胞の個数は

$$2\dim \mathrm{Ker}(\varphi_{A^p}) - \dim \mathrm{Ker}(\varphi_{A^{p+1}}) - \dim \mathrm{Ker}(\varphi_{A^{p-1}})$$

に等しいことになる。また，教科書の第 6 章定理 2-9 から，これは

$$\mathrm{rank}\, A^{p+1} - 2\,\mathrm{rank}\, A^p + \mathrm{rank}\, A^{p-1}$$

とも等しい。

以上で，定理のすべての主張が証明された。 ■

◈ジョルダン標準形定理の証明

定理 2 から，後延ばしにしていた，教科書の定理 1-5 の証明，よって，ジョルダン標準形定理（教科書の定理 1-3）の証明を与えることができる。先にも述べたように，広義固有空間による分解（教科書の定理 1-4）から，ジョルダン標準形定理（定理 1-3）の証明のためには，定理 1-5 を証明すれば十分なのであった。

定理 1-5 の証明　A は λ のみを固有値にもつとき，$N=A-\lambda E$ はべき零行列であることを示す。

三角化定理（教科書の第 8 章定理 2-2）から，K 上の n 次正則行列 P が存在して

$$P^{-1}AP=\begin{bmatrix} \lambda & * & * & \cdots & * \\ & \lambda & * & \cdots & * \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ \mathbf{0} & & & & \lambda \end{bmatrix}$$

という形になる。このとき

$$P^{-1}NP=P^{-1}AP-\lambda P^{-1}EP=P^{-1}AP-\lambda E=\begin{bmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ & 0 & * & \cdots & * \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & * \\ \mathbf{0} & & & & 0 \end{bmatrix}$$

となるが，これはべき零である（教科書の第 6 章章末問題 9 ）。

$(P^{-1}NP)^k=P^{-1}N^kP$ で，P は正則行列であるから，これは N がべき零であることを示している。

よって，$N=A-\lambda E$ に，定理 2-2 を適用することができる。このとき

$$P^{-1}NP=\begin{bmatrix} J(0,\ l_1) & & & \mathbf{0} \\ & J(0,\ l_2) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & J(0,\ l_r) \end{bmatrix} \qquad (*)$$

（ただし，$l_1+l_2+\cdots\cdots+l_r=n$）となる正則行列 P が存在する。よって

$$\begin{aligned} P^{-1}AP&=P^{-1}(N+\lambda E)P=P^{-1}NP+\lambda E \\ &=\begin{bmatrix} J(\lambda,\ l_1) & & & \mathbf{0} \\ & J(\lambda,\ l_2) & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & J(\lambda,\ l_r) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となって，題意の形になる。さらに，$p=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$ について，ここに現れる p 次のジョルダン細胞 $J(\lambda,\ p)$ の個数は，$(*)$ に現れる p 次のジョルダン細胞 $J(0,\ p)$ の個数に等しいから，

$\operatorname{rank} A^{p+1}-2\operatorname{rank} A^{p}+\operatorname{rank} A^{p-1}$ に等しい。

以上で，定理は証明された。■