

第 3 章 微分法

1 0 微分係数と導関数, 導関数の計算

[1] 微分係数と導関数

- 1 関数  $f(x)$  の  $x=a$  における微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\rightarrow a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

- 2 関数  $f(x)$  の導関数  $f'(x)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

[2] 微分可能と連続

関数  $f(x)$  が  $x=a$  で微分可能ならば,  $x=a$  で連続である。

[注] 関数  $f(x)$  が  $x=a$  で連続であっても,  $x=a$  で微分可能であるとは限らない。

[3] 導関数の公式

関数  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  がいずれも微分可能であるとき

- 1  $\{kf(x)\}'=kf'(x)$       ただし,  $k$  は定数  
2  $\{f(x)+g(x)\}'=f'(x)+g'(x)$   
3  $\{f(x)-g(x)\}'=f'(x)-g'(x)$   
4  $\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$   
 $\{f(x)g(x)h(x)\}'=f'(x)g(x)h(x)+f(x)g'(x)h(x)+f(x)g(x)h'(x)$   
5  $\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$   
6  $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$

$x^p$  の導関数  $p$  が有理数のとき  $(x^p)'=px^{p-1}$

[4] 合成関数の微分法

- 1 微分可能な 2 つの関数  $y=f(u)$ ,  $u=g(x)$  について  $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

[注]  $\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$  のように書き表すこともできる。

- 2  $a$ ,  $b$  は定数,  $p$  は有理数とする。関数  $f(x)$  が微分可能であるとき

$$\frac{d}{dx}f(ax+b)=af'(ax+b), \quad \frac{d}{dx}[f(x)]^p=p[f(x)]^{p-1}f'(x)$$

[5] 逆関数の微分法  $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

1 1 いろいろな関数の導関数

[1] 三角関数の導関数, 対数関数の導関数, 指数関数の導関数

$$\begin{array}{lll}(\sin x)'=\cos x & (\cos x)'=-\sin x & (\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x} \\ (\log x)'=\frac{1}{x} & (\log_a x)'=\frac{1}{x\log a} & (\log|x|)'=\frac{1}{x} \quad (\log_a|x|)'=\frac{1}{x\log a} \\ (e^x)'=e^x & (a^x)'=a^x\log a & \end{array}$$

自然対数の底  $e$  の定義  $e=\lim_{k\rightarrow 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}=2.71828\cdots$

[注] 微分法や積分法では,  $e$  を底とする対数, すなわち自然対数のときに, 底  $e$  を省略して, 単に  $\log x$  と書くことが多い。

[2]  $x^\alpha$  の導関数

$\alpha$  が実数のとき  $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

[3] 対数微分法

- 1 関数  $y=f(x)$  について, 両辺の絶対値の自然対数を取り, 両辺を  $x$  で微分して, 導関数を求める方法を対数微分法という。  
2 積・商・指数・累乗の形の関数を微分するとき, 対数微分法を使うと, 計算が簡単になる場合がある。

1 2 第  $n$  次導関数      1 3 曲線の方程式と導関数

[1] 第  $n$  次導関数

関数  $y=f(x)$  について

第 2 次導関数とは,  $f(x)$  の導関数  $f'(x)$  をさらに微分した関数で

$$y'', \quad f''(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \frac{d^2}{dx^2}f(x) \text{ などの記号で表す。}$$

第  $n$  次導関数とは,  $f(x)$  を  $n$  回微分して得られる関数で

$$y^{(n)}, \quad f^{(n)}(x), \quad \frac{d^ny}{dx^n}, \quad \frac{d^n}{dx^n}f(x) \text{ などの記号で表す。}$$

[2] 曲線の方程式と導関数

方程式  $F(x, y)=0$  で表される関数 (陰関数) の導関数は, (合成関数の微分法により)

$$\frac{d}{dx}f(y)=\frac{d}{dy}f(y)\cdot\frac{dy}{dx} \text{ を用いて, 両辺を } x \text{ で微分する。}$$

[3] 媒介変数表示と導関数

$$x=f(t), \quad y=g(t) \text{ (} t \text{ は媒介変数) のとき} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$