

第 5 章 積分法とその応用

2 2 不定積分とその基本性質

[1] 不定積分 積分定数を C とする。

$F'(x)=f(x)$ のとき, $f(x)$ の不定積分は $\int f(x)dx=F(x)+C$

x^α の不定積分 (α は実数)

$\int x^\alpha dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C$ ただし, $\alpha\neq-1$

$\int \frac{1}{x}dx=\log|x|+C$

[2] 不定積分の基本性質

1 $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$ ただし, k は定数

2 $\int \{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

3 $\int \{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

[3] 三角関数, 指数関数の不定積分 積分定数を C とする。

$\int \sin xdx=-\cos x+C$ $\int \cos xdx=\sin x+C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\tan x}+C$

$\int e^xdx=e^x+C$ $\int a^xdx=\frac{a^x}{\log a}+C$

2 3 置換積分法と部分積分法

[1] 置換積分法 積分定数を C とする。

$F'(x)=f(x)$, $a\neq 0$ とするとき $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$

1 $\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$ ただし, $x=g(t)$

2 $\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(u)du$ ただし, $g(x)=u$

3 $\int \frac{g'(x)}{g(x)}dx=\log|g(x)|+C$

[2] 部分積分法

4 $\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)-\int f'(x)g(x)dx$

とくに $\int f(x)dx=xf(x)-\int xf'(x)dx$

2 4 いろいろな関数の不定積分

[1] 分数関数の不定積分

- 分子の次数が分母の次数より低くなるように変形する。
- 部分分数に分解する。

[2] 三角関数の不定積分

- 三角関数の公式 (2 倍角の公式, 半角の公式, 和と積の公式など) で変形する。

和と積の公式 $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

・ $f(\sin x)\cos x$, $f(\cos x)\sin x$, $f(\tan x)\frac{1}{\cos^2 x}$ の形に変形する。(置換積分法)

2 5 定積分とその基本性質

[1] 定積分

ある区間で連続な関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とし, a , b をその区間に含まれる任意の値とするととき

$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$

[2] 定積分の基本性質

1 $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ ただし, k は定数

2 $\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

3 $\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

4 $\int_a^a f(x)dx=0$

5 $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

6 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

2 6 定積分の置換積分法

[1] 定積分の置換積分法

$x=g(t)$ とおくとき, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$ ならば

$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$

よく用いられるおき換え

$f(ax+b)$ \longrightarrow $ax+b=t$

$\{f(x)\}^\alpha f'(x)$, $\frac{f'(x)}{f(x)}$ \longrightarrow $f(x)=t$

$\sqrt{a^2-x^2}$ ($a>0$) \longrightarrow $x=a\sin\theta$ または $x=a\cos\theta$

$\frac{1}{x^2+a^2}$ ($a>0$) \longrightarrow $x=a\tan\theta$

[注] $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ ($a\neq 0$) の定積分の求め方

$D=b^2-4ac$ とおき, $D>0$ ならば部分分数に分け, $D=0$ ならば $\frac{k}{t^2}$ の形,

$D<0$ ならば $\frac{k}{t^2+p^2}$ の形。

[2] 偶関数と奇関数の定積分

$f(-x)=f(x)$ を満たす関数を 偶関数, $f(-x)=-f(x)$ を満たす関数を 奇関数 という。

1 偶関数 $f(x)$ について $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

2 奇関数 $f(x)$ について $\int_{-a}^a f(x)dx=0$

2 7 定積分の部分積分法

[1] 定積分の部分積分法

$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$

$\int_a^b f(x)dx=\left[xf(x)\right]_a^b-\int_a^b xf'(x)dx$

2 8 定積分で表された関数

[1] 定積分と導関数

a が定数のとき $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

2 9 定積分と和の極限, 定積分と不等式

[1] 区分求積法と定積分

$\lim_{n\rightarrow\infty}\sum_{k=1}^n f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx$ ただし, $\Delta x=\frac{b-a}{n}$, $x_k=a+k\Delta x$

とくに $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$

[2] 定積分と不等式

区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$, $g(x)$ について

$f(x)\geq g(x)$ ならば $\int_a^b f(x)dx\geq\int_a^b g(x)dx$

等号が成り立つのは, 常に $f(x)=g(x)$ のときである。

3 0 面積		発展 微分方程式
1 曲線 $y=f(x)$ と面積	区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geq 0$ のとき、曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a, x=b$ で囲まれた部分の面積 S は $S=\int_a^b f(x)dx$	1 微分方程式 未知の関数の導関数を含む等式 (例) $\frac{dy}{dx}=x+1$
注 区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \leq 0$ のときは	$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx$	2 微分方程式の解 与えられた微分方程式を満たす関数。 微分方程式を解くと、いくつかの任意の定数を含んだ解が得られる。
2 2 つの曲線の間の面積	区間 $[a, b]$ で常に $f(x) \geq g(x)$ のとき、2 つの曲線 $y=f(x), y=g(x)$ と 2 直線 $x=a, x=b$ で囲まれた部分の面積 S は $S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$	2 微分方程式の解き方
3 曲線 $x=g(y)$ と面積	区間 $c \leq y \leq d$ で常に $g(y) \geq 0$ のとき、曲線 $x=g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=c, y=d$ で囲まれた部分の面積 S は $S=\int_c^d g(y)dy$	1 $\frac{dy}{dx}=f(x), \frac{d^2y}{dx^2}=g(x)$ などの解は、両辺を x で積分して求める。
4 媒介変数表示と面積	y は x の関数とする。曲線 $x=f(t), y=g(t)$ と x 軸および 2 直線 $x=a, x=b$ ($a < b$) で囲まれた部分の面積 S は、 $a=f(\alpha), b=f(\beta)$ で常に $y \geq 0$ ならば $S=\int_a^b ydx=\int_\alpha^\beta g(t)f'(t)dt$	2 $f(y)\frac{dy}{dx}=g(x)$ の解は、 $\int f(y)dy=\int g(x)dx$ から求める。
3 1 体積		
1 定積分と体積	区間 $[a, b]$ において、 x 軸に垂直な平面による切り口の面積が $S(x)$ であるような立体の体積 V は $V=\int_a^b S(x)dx$	
2 回転体の体積	1 曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a, x=b$ で囲まれた部分が、 x 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は $V=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2dx=\pi\int_a^b y^2dx \quad \text{ただし, } a < b$	
	2 曲線 $x=g(y)$ と y 軸および 2 直線 $y=c, y=d$ で囲まれた部分が、 y 軸の周りに 1 回転してできる回転体の体積 V は $V=\pi\int_c^d \{g(y)\}^2dy=\pi\int_c^d x^2dy \quad \text{ただし, } c < d$	
3 2 道のり		
1 速度と位置	数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標を $x=f(t)$ 、速度を v とすると P の $t=t_1$ から $t=t_2$ までの位置の変化量は $f(t_2)-f(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} vdt$ 時刻 $t=t_2$ における P の座標は $x=f(t_2)=f(t_1)+\int_{t_1}^{t_2} vdt$	
2 道のり	数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度を v とすると、時刻 t_1 から t_2 までに P が通過する道のり s は $s=\int_{t_1}^{t_2} v dt$ 座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標を (x, y) 、速度を \vec{v} とすると、時刻 t_1 から t_2 までに P が通過する道のり s は $s=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_{t_1}^{t_2} \vec{v} dt$	
3 3 曲線の長さ		
1 媒介変数表示された曲線の長さ	曲線 $x=f(t), y=g(t)$ ($a \leq t \leq b$) の長さ L は $L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}dt$	
2 曲線 $y=f(x)$ の長さ	曲線 $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$) の長さ L は $L=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}dx$	