

第4章 微分法の応用

1.4 接線の方程式

[1] 接線の方程式，法線の方程式

曲線  $y=f(x)$  上の点  $(a, f(a))$  における接線の方程式は  $y-f(a)=f'(a)(x-a)$   
曲線  $y=f(x)$  上の点  $(a, f(a))$  における法線の方程式は

$$f'(a)\neq 0 \text{ のとき } y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a), \quad f'(a)=0 \text{ のとき } x=a$$

1.5 平均値の定理

[1] 平均値の定理

関数  $f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続で，区間  $(a, b)$  で微分可能ならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c), \quad a<c<b$$
 を満たす実数  $c$  が存在する。  
[注] 平均値の定理は，次のロルの定理を一般化したもので，曲線  $y=f(x)$  において，その上の2点  $A(a, f(a))$ ， $B(b, f(b))$  を結ぶ線分に平行な接線が引けるような点  $C$  が，曲線上で， $A$  と  $B$  の間にあることを意味している。なお，この点  $C$  は1つとは限らない。  
[参考] ロルの定理（平均値の定理の特別な場合）  
関数  $f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続，区間  $(a, b)$  で微分可能で， $f(a)=f(b)$  ならば  $f'(c)=0, a<c<b$  を満たす実数  $c$  が存在する。

1.6 関数の値の変化

[1] 関数の増減 関数  $f(x)$  が区間  $[a, b]$  で連続，区間  $(a, b)$  で微分可能であるとする。  
1 区間  $(a, b)$  で常に  $f'(x)>0$  ならば， $f(x)$  は区間  $[a, b]$  で増加する。  
2 区間  $(a, b)$  で常に  $f'(x)<0$  ならば， $f(x)$  は区間  $[a, b]$  で減少する。  
3 区間  $(a, b)$  で常に  $f'(x)=0$  ならば， $f(x)$  は区間  $[a, b]$  で定数である。  
[2] 関数の極大と極小  
1 連続な関数  $f(x)$  が， $x=a$  を境目として，増加から減少に移るとき  $f(x)$  は  $x=a$  で極大で，極大値は  $f(a)$   
連続な関数  $f(x)$  が， $x=b$  を境目として，減少から増加に移るとき  $f(x)$  は  $x=b$  で極小で，極小値は  $f(b)$   
2 関数  $f(x)$  が  $x=a$  で微分可能であるとき  $f(x)$  が  $x=a$  で極値をとるならば  $f'(a)=0$   
[注]  $f'(a)=0$  であっても， $f(x)$  が  $x=a$  で極値をとるとは限らない。

1.7 関数の最大と最小

[1] 関数の最大と最小

区間  $[a, b]$  において連続な関数  $f(x)$  の最大値，最小値は， $f(x)$  の極値と区間の両端における関数の値  $f(a), f(b)$  との大小を調べて決定する。

1.8 関数のグラフ

[1] 曲線の凹凸 関数  $f(x)$  が第2次導関数  $f''(x)$  をもつとする。  
1 曲線  $y=f(x)$  は  $f''(x)>0$  である区間では，下に凸  $f''(x)<0$  である区間では，上に凸  
2  $f''(a)=0$  のとき， $x=a$  の前後で  $f''(x)$  の符号が変わるならば，点  $(a, f(a))$  は曲線  $y=f(x)$  の変曲点である。  
[2] グラフの概形  
グラフの概形をかくには，次のことに注意する。  
・定義域を調べる。曲線の存在範囲，不連続点を調べる。  
・対称性を調べる。  
・関数の値の増加や減少，極大や極小を調べる。  
・曲線の凹凸，変曲点を調べる。  
・曲線が漸近線をもつかどうかを調べる。  
・座標軸との共有点など，容易にわかる曲線上の点を求める。  
漸近線の求め方 関数  $y=f(x)$  のグラフ（曲線）について  
1  $y$  軸に垂直な漸近線  $\lim_{x\rightarrow\infty}f(x)=a$  または  $\lim_{x\rightarrow-\infty}f(x)=a$  が成り立つとき，直線  $y=a$  は漸近線である。  
2  $x$  軸に垂直な漸近線  $\lim_{x\rightarrow c+0}f(x), \lim_{x\rightarrow c-0}f(x)$  のうち少なくとも1つが  $\infty$  または  $-\infty$  であるとき，直線  $x=c$  は漸近線である。  
3  $x$  軸に垂直でない漸近線  $\lim_{x\rightarrow\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$  または  $\lim_{x\rightarrow-\infty}\{f(x)-(ax+b)\}=0$  であるとき，直線  $y=ax+b$  は漸近線である。  
 $\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{f(x)}{x}=a, \lim_{x\rightarrow\infty}\{f(x)-ax\}=b$  ならば，直線  $y=ax+b$  は漸近線である。

[3] 第2次導関数と極値  $f''(x)$  が連続関数であるとする。  
1  $f'(a)=0$  かつ  $f''(a)>0$  ならば  $f(a)$  は極小値  
2  $f'(a)=0$  かつ  $f''(a)<0$  ならば  $f(a)$  は極大値

1.9 方程式・不等式への応用

[1] 不等式の証明

不等式  $f(x)>g(x)$  を証明するには，関数  $F(x)=f(x)-g(x)$  の値の変化を調べる。  
・関数  $F(x)$  の最小値を求めて，(最小値) $>0$  を示す。  
・関数  $F(x)$  が  $x\geq a$  で  $F'(x)>0$  かつ  $F(a)\geq 0$  ならば， $x\geq a$  で  $F(x)\geq 0$

[2] 方程式の実数解の個数

方程式  $f(x)=a$  ( $a$  は定数) の異なる実数解の個数は，関数  $y=f(x)$  のグラフと直線  $y=a$  の共有点の個数に一致する。

[3]  $e^x$  と  $x^n$  に関する極限

自然数  $n$  に対して，次のことが成り立つ。

$$\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty, \quad \lim_{x\rightarrow\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$$

2.0 速度と加速度

[1] 直線上の点の運動

数直線上を運動する点  $P$  の時刻  $t$  における座標  $x$  が  $x=f(t)$  で表されるとき，時刻  $t$  における  $P$  の速度  $v$ ，加速度  $\alpha$  は

$$v=\frac{dx}{dt}=f'(t), \quad \alpha=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}=f''(t)$$

[2] 平面上の点の運動

座標平面上を運動する点  $P(x, y)$  の時刻  $t$  における  $x$  座標， $y$  座標 が  $t$  の関数であるとき，時刻  $t$  における  $P$  の速度  $\vec{v}$ ，加速度  $\vec{\alpha}$  は

$$\vec{v}=\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right), \quad \vec{\alpha}=\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

また，速さ(速度の大きさ)  $|\vec{v}|$ ，加速度の大きさ  $|\vec{\alpha}|$  は

$$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}, \quad |\vec{\alpha}|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}$$

[3] 等速円運動

$r>0, \omega>0$  とする。座標平面上を運動する点  $P$  の時刻  $t$  における座標  $(x, y)$  が

$$x=r\cos\omega t, \quad y=r\sin\omega t$$

で表されるとき， $P$  は原点  $O$  を中心とする半径  $r$  の円周上を一定の速さ  $r\omega$  で動く。このような運動を等速円運動といい， $\omega$  をその角速度という。

2.1 近似式

[1] 1次の近似式

1  $h\neq 0$  のとき  $f(a+h)\simeq f(a)+f'(a)h$   
2  $x\neq 0$  のとき  $f(x)\simeq f(0)+f'(0)x$