第１章　平面上のベクトル

第１節　ベクトルとその演算

１　ベクトル　　２　ベクトルの演算

1　ベクトル

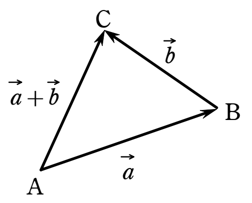
ベクトルの相等　$\vec{a}=\vec{b} \iff \vec{a}$ と $\vec{b}$ の向きが同じで大きさが等しい

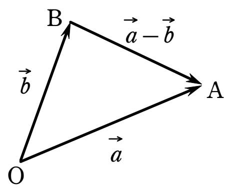
逆ベクトル $-\vec{a}$　$\vec{a}$ と大きさが等しく向きが反対のベクトル

零ベクトル $\vec{0}$　大きさが 0 のベクトル，向きは考えない

2　ベクトルの演算

加法　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　　　**減法**　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$





実数倍 $k\vec{a}$

$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき　　$k>0$ ならば　$\vec{a}$ と向きが同じで，大きさが k 倍のベクトル

$k<0$ ならば　$\vec{a}$ と向きが反対で，大きさが $|k|$ 倍のベクトル

ベクトルの演算法則　k，l は実数

$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$，　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

$k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$，　$(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$，　$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

注　$\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$，　$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$，　$0\vec{a}=\vec{0}$，　$k\vec{0}=\vec{0}$

3　ベクトルの平行

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき　　$\vec{a}/\!/\vec{b} \iff \vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k がある

4　ベクトルの分解

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，どんなベクトル $\vec{p}$ も，適当な実数 s，t を用いて，$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ の形でただ 1 通りに表すことができる。

参考　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$ は **1 次独立** であるという。

３　ベクトルの成分

1　ベクトルの成分表示

基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$

座標平面上で，x 軸，y 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル

$$\vec{e_1}=(1,\ 0),\ \vec{e_2}=(0,\ 1)$$

ベクトルの成分表示

O を原点とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である点 A の座標が $(a_1,\ a_2)$ のとき

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2)\quad(\vec{a}\text{ の成分表示})$$

ベクトルの相等

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ について

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$$

ベクトルの大きさ

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

2　和，差，実数倍の成分表示

$(a_1,\ a_2)+(b_1,\ b_2)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

$(a_1,\ a_2)-(b_1,\ b_2)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

$k(a_1,\ a_2)=(ka_1,\ ka_2)$　　ただし，k は実数

3　2 点 A，B とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2),\quad |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

４　ベクトルの内積

1　ベクトルの内積

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

注　$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める。

2　内積と成分　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ とする。

1　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

以下，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ とする。

2　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2}}$$

3　**垂直条件**　$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2=0$

4　**平行条件**　$\vec{a}/\!/\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$　　$\leftarrow\theta=0°,\ 180°$

$\iff a_1b_2-a_2b_1=0$

3　内積の性質

1　$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$　　　2　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

3　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　　　4　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

5　$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$　　ただし，k は実数

参考　1 より　$\vec{a}\cdot\vec{a}\geqq0$，$|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

4　三角形の面積

$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積 S は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

一般に，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}=(p_1,\ p_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{q}=(q_1,\ q_2)$ とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}=\frac{1}{2}|p_1q_2-p_2q_1|$$

第２節　ベクトルと平面図形

５　位置ベクトル

1　位置ベクトル

平面上で，点 O を定めておくと，どんな点 P の位置も，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ によって決まる。

$\vec{p}$　　点 O に関する点 P の位置ベクトル

$\mathrm{P}(\vec{p})$　点 O に関する位置ベクトルが $\vec{p}$ である点 P

2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して　　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

2　内分点，外分点，三角形の重心

1　2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点，$m:n$ に外分する点の位置ベクトルは，それぞれ

$$\text{内分}\cdots\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n},\qquad \text{外分}\cdots\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

とくに，線分 AB の中点の位置ベクトルは　$\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

注意　内分点も外分点もその位置ベクトルは，適当な実数 s を用いて $(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$ の形に表される。

2　3 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

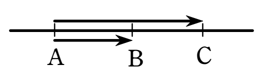
６　ベクトルの図形への応用

1　一直線上にある点

2 点 A，B が異なるとき

点 C が直線 AB 上にある

$\iff \overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k がある



2　ベクトルの分解

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき

$$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b} \iff s=s',\ t=t'\quad(s,\ t,\ s',\ t'\text{ は実数})$$

とくに　　$s\vec{a}+t\vec{b}=\vec{0} \iff s=t=0$

3　内積の利用

1　なす角 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{CD}}|\cos\theta$ から。

2　$\mathrm{AB}\perp\mathrm{CD} \iff \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$　$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq0,\ \overrightarrow{\mathrm{CD}}\neq0)$

3　$\mathrm{AB}^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

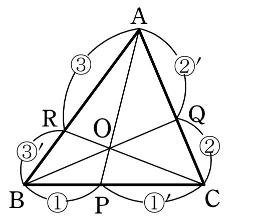
4 チェバ，メネラウスの定理の利用

1　チェバの定理

△ABC の頂点 A，B，C と 1 点 O を結ぶ各直線が，対辺またはその延長と交わる点をそれぞれ P，Q，R とすると

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

が成り立つ。



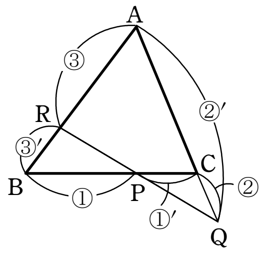
$$\boxed{\frac{①}{①'}\cdot\frac{②}{②'}\cdot\frac{③}{③'}=1}$$

2　メネラウスの定理

△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長が，頂点を通らない直線 ℓ と，それぞれ P，Q，R で交わるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

が成り立つ。



7　図形のベクトルによる表示

1 直線のベクトル方程式

A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ とし，s，t は実数の変数とする。

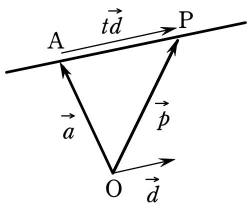
1　点 A を通り，$\vec{d}\,(\neq\vec{0})$ に平行な直線　$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$

2　異なる 2 点 A，B を通る直線

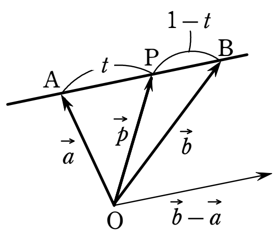
$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

または　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$　　ただし　$s+t=1$

1

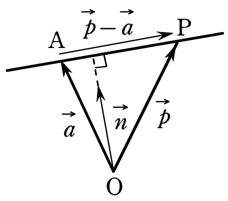


2



3　点 A を通り，$\vec{n}\,(\neq\vec{0})$ に垂直な直線

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$$



2 直線の媒介変数表示

A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ とする。

1　点 A を通り，方向ベクトルが $\vec{d}=(l,\ m)$ である直線

$$\begin{cases}x=x_1+lt\\ y=y_1+mt\end{cases}\longrightarrow\quad m(x-x_1)-l(y-y_1)=0$$

2　異なる 2 点 A，B を通る直線　$\begin{cases}x=x_1+(x_2-x_1)t\\ y=y_1+(y_2-y_1)t\end{cases}$

$$\longrightarrow\quad (y_2-y_1)(x-x_1)-(x_2-x_1)(y-y_1)=0$$

3 平面上の点の存在範囲

△OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とすると，点 P の存在範囲は次のようになる。

1　$s+t=1$ のとき　直線 AB

2　$s+t=1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$ のとき　線分 AB

3　$s+t\leqq1$，$s\geqq0$，$t\geqq0$ のとき　△OAB の周および内部

4 円のベクトル方程式

1　中心 C$(\vec{c})$，半径 r の円

$$|\vec{p}-\vec{c}|=r$$

2　2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を直径の両端とする円

$$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$$