第３章　数　列

第１節　等差数列と等比数列

１　数列と一般項

1　数列と一般項

数を一列に並べたものを **数列** という。数列 a_1, a_2, a_3, ……, a_n, …… を $\{a_n\}$ と表す。数列における各数を **項** といい，最初の項を **初項**，n 番目の項を **第 n 項** という。数列 $\{a_n\}$ の第 n 項が n の式で表されるとき，これを数列 $\{a_n\}$ の **一般項** という。

２　等差数列

1　等差数列

初項に一定の数 d を次々と足して得られる数列を **等差数列** といい，その一定の数 d を **公差** という。

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4 \quad \cdots\cdots$$

2　等差数列の一般項

初項 a，公差 d の等差数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_{n+1} - a_n = d$$

3　等差数列をなす３数

数列 a，b，c が等差数列 $\iff 2b = a + c$　(b を **等差中項** という)

３　等差数列の和

1　等差数列の和

等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

１　初項 a，第 n 項 l のとき　$S_n = \dfrac{1}{2}n(a+l)$

２　初項 a，公差 d のとき　$S_n = \dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

注　１は初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S_n を表している。

2　自然数の和，奇数の和

$$1+2+3+\cdots\cdots+n = \frac{1}{2}n(n+1), \quad 1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1) = n^2$$

４　等比数列

1　等比数列

初項に一定の数 r を次々と掛けて得られる数列を **等比数列** といい，その一定の数 r を **公比** という。

$$a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3 \xrightarrow{\times r} a_4 \quad \cdots\cdots$$

2　等比数列の一般項

初項 a，公比 r の等比数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = ar^{n-1}$$

$$a_{n+1} = ra_n$$

3　等比数列をなす３数

a，b，c が 0 でないとする。

数列 a，b，c が等比数列 $\iff b^2 = ac$　(b を **等比中項** という)

５　等比数列の和

1　等比数列の和

初項 a，公比 r の等比数列の初項から第 n 項までの和 S_n は

$r \neq 1$ のとき　$S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r = 1$ のとき　$S_n = na$

参考　$r \neq 1$ のとき　$\dfrac{1-r^n}{1-r} = 1 + r + r^2 + \cdots\cdots + r^{n-1}$

第２節　いろいろな数列

６　和の記号 $\sum$

1　いろいろな数列の和の公式

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = nc$　　とくに　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$　　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$　$(r \neq 1)$

2　和の記号 $\sum$ の性質

１　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) = \sum_{k=1}^{n}a_k + \sum_{k=1}^{n}b_k$,　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k) = \sum_{k=1}^{n}a_k - \sum_{k=1}^{n}b_k$

２　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} pa_k = p\sum_{k=1}^{n} a_k$　　ただし，p は k に無関係な定数

７　階差数列

1　階差数列と一般項

数列 $\{a_n\}$ の隣り合う２項の差 $a_{n+1} - a_n = b_n$ ($n=1$, 2, 3, ……) を項とする数列 $\{b_n\}$ を，数列 $\{a_n\}$ の **階差数列** という。

$n \geqq 2$ のとき，数列 $\{a_n\}$ の第 n 項は　$a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_k$　…… ①

注　上の ① は $n \geqq 2$ のときの式であるから，$n=1$ で成り立つとは限らない。

2　数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とすると

初項 a_1 は　$a_1 = S_1$　　$n \geqq 2$ のとき　$a_n = S_n - S_{n-1}$

８　いろいろな数列の和

1　分数の数列の和

分数の数列の和では，次の変形がよく利用される。

$$\frac{1}{(k+a)(k+b)} = \frac{1}{b-a}\cdot\frac{(k+b)-(k+a)}{(k+a)(k+b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+b}\right) \quad (a \neq b)$$

2　(等差数列)×(等比数列) の数列の和

等比数列の公比が r であるとすると，求める和を S とおき，$S - rS$ を計算する。

3　群数列

数列を，ある規則によっていくつかの組 (群) に分けて考えるとき，これを **群数列** という。群数列では，もとの数列の規則，群の分け方の規則に着目する。

第３節　漸化式と数学的帰納法

９　漸化式

1　漸化式

数列 $\{a_n\}$ において，たとえば $a_{n+1}=2a_n+3$ のように，前の項から次の項を決めるための関係式を **漸化式** という。

2　漸化式と一般項　初項を a とする。

１　$a_{n+1}=a_n+d$ $\longrightarrow$ 公差 d の等差数列　$a_n=a+(n-1)d$

２　$a_{n+1}=ra_n$ $\longrightarrow$ 公比 r の等比数列　$a_n=ar^{n-1}$

３　$a_{n+1}=a_n+f(n)$ $\longrightarrow$ 階差数列の第 n 項が $f(n)$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)$

４　$a_{n+1}=pa_n+q$ $(p\fallingdotseq 0,\ p\fallingdotseq 1)$ $\longrightarrow$ $a_{n+1}-c=p(a_n-c)$ の形に変形できる。

(c は $c=pc+q$ を満たす数)

3　隣接３項間の漸化式　$pa_{n+2}+qa_{n+1}+ra_n=0$　$(p\fallingdotseq 0)$

２次方程式 $px^2+qx+r=0$ の２つの解を α，β とする。

①　$\alpha\fallingdotseq\beta$ の場合

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$$
$$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$$

と変形する。数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は公比 β の等比数列，数列 $\{a_{n+1}-\beta a_n\}$ は公比 α の等比数列である。

特に，α，β の一方が１（このとき，$p+q+r=0$）の場合，階差数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ が等比数列になる。

②　$\alpha=\beta$ (重解) の場合

$$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\alpha a_n)$$

と変形する。数列 $\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ は公比 α の等比数列である。

１０　数学的帰納法

1　数学的帰納法

一般に，自然数 n を含む条件 (A) があるとき，「すべての自然数 n について (A) が成り立つ」を証明するには，次の [1]，[2] を示せばよい。

[1]　$n=1$ のとき，(A) が成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき (A) が成り立つと仮定すると，$n=k+1$ のときも (A) が成り立つ。

注意　ある特定の自然数 l 以上のすべての自然数 n について，(A) が成り立つことを証明するには，[1] で $n=l$，[2] で $k\geqq l$ とすればよい。

数学的帰納法の証明には，他にも次のようなものがある。

①　$n\leqq k$ のときを仮定して，$n=k+1$ のときを証明。

②　$n=k$，$k+1$ のときを仮定して，$n=k+2$ のときを証明。ただし，この場合は [1] で例えば $n=1$，2 を証明する必要がある。