第２章　空間のベクトル

1　空間の点

$\boxed{1}$ 空間の点の座標

1　x 軸，y 軸，z 軸上の点は，それぞれ $(a,\ 0,\ 0)$，$(0,\ b,\ 0)$，$(0,\ 0,\ c)$ と表される。

2　xy 平面，yz 平面，zx 平面上の点は，それぞれ $(a,\ b,\ 0)$，$(0,\ b,\ c)$，$(a,\ 0,\ c)$ と表される。

$\boxed{2}$ 対称な点の座標

原点，座標軸，座標平面に関して，点 $(a,\ b,\ c)$ と対称な点の座標は次のようになる。

1　原点：$(-a,\ -b,\ -c)$

2　x 軸：$(a,\ -b,\ -c)$，　y 軸：$(-a,\ b,\ -c)$，
　z 軸：$(-a,\ -b,\ c)$

3　xy 平面：$(a,\ b,\ -c)$，　yz 平面：$(-a,\ b,\ c)$，
　zx 平面：$(a,\ -b,\ c)$

$\boxed{3}$ 2 点間の距離

2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 間の距離は

$$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

とくに，原点 O と点 A の距離は

$$\mathrm{OA}=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2+z_1{}^2}$$

2　空間のベクトル

$\boxed{1}$ 空間のベクトル

空間における有向線分で向きと大きさを表す。

空間ベクトルの和，差，実数倍の定義も，平面上の場合と同様である。平面上のベクトルについて成り立つ性質は，空間のベクトルに対してもそのまま成り立つ。

$\boxed{2}$ ベクトルの分解

異なる 4 点 O，A，B，C が同じ平面上にないとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると，空間のどんなベクトル $\vec{p}$ も，次の形にただ 1 通りに表される。

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}\qquad \text{ただし，} s,\ t,\ u \text{ は実数}$$

参考　空間におけるこのような 3 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は **1 次独立** であるという。

3　ベクトルの成分

$\boxed{1}$ ベクトルの成分表示

基本ベクトル $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$，$\vec{e_3}$　x 軸，y 軸，z 軸の正の向きと同じ向きの単位ベクトル

$$\vec{e_1}=(1,\ 0,\ 0),\ \vec{e_2}=(0,\ 1,\ 0),\ \vec{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$$

$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ である点 A の座標が $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ のとき

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}+a_3\vec{e_3}$$

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)\qquad (\vec{a} \text{ の成分表示})$$

ベクトルの相等　$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ a_3=b_3$$

ベクトルの大きさ　$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$ のとき　$|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$

$\boxed{2}$ 和，差，実数倍の成分表示

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)+(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$$

$$(a_1,\ a_2,\ a_3)-(b_1,\ b_2,\ b_3)=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3)$$

$$k(a_1,\ a_2,\ a_3)=(ka_1,\ ka_2,\ ka_3)\qquad \text{ただし，} k \text{ は実数}$$

$\boxed{3}$ 2 点 A，B とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

4　ベクトルの内積

$\boxed{1}$ ベクトルの内積

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

注　$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める。

$\boxed{2}$ 内積と成分　$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ とする。

1　$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

以下，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ とする。

2　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ $(0°\leqq\theta\leqq180°)$ とすると

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}}$$

3　**垂直条件**　$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

4　**平行条件**　$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=\pm|\vec{a}||\vec{b}|$　　$\leftarrow\theta=0°,\ 180°$

$\boxed{3}$ 内積の性質

平面上のベクトルの場合と同様に，次のことが成り立つ。

1　$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$　　　2　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

3　$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$　　　4　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

5　$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$　　ただし，k は実数

5　ベクトルの図形への応用

$\boxed{1}$ 位置ベクトル

平面上のベクトルの場合と同様に，次のことが成り立つ。

1　2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}-\vec{a}$

2　2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ に対して，線分 AB を $m:n$ に内分する点，$m:n$ に外分する点の位置ベクトルは，それぞれ

$$\text{内分}\cdots\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n},\qquad \text{外分}\cdots\frac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}$$

とくに，線分 AB の中点の位置ベクトルは

$$\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

3　3 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする △ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は

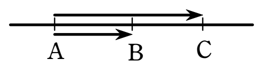
$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$\boxed{2}$ 一直線上にある点

2 点 A，B が異なるとき

点 C が直線 AB 上にある

$\iff \overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となる実数 k がある



$\boxed{3}$ 平面 ABC 上の点の位置ベクトル

一直線上にない 3 点 A，B，C と点 P について

1　点 P が平面 ABC 上にある

$\iff \overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ となる実数 s，t がある

2　点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ が平面 ABC 上にある

$\iff \vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$，$s+t+u=1$ となる実数 s，t，u がある

6　座標空間における図形

$\boxed{1}$ 2 点間の距離と内分点・外分点

2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

1　A，B 間の距離は　$\mathrm{AB}=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

2　線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は

$$\left(\frac{na_1+mb_1}{m+n},\ \frac{na_2+mb_2}{m+n},\ \frac{na_3+mb_3}{m+n}\right)$$

線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は

$$\left(\frac{-na_1+mb_1}{m-n},\ \frac{-na_2+mb_2}{m-n},\ \frac{-na_3+mb_3}{m-n}\right)$$

$\boxed{2}$ 座標平面に平行な平面の方程式

点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$ を通り，yz 平面に平行な平面の方程式は　$x=a$　[x 軸に垂直]

点 $\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$ を通り，zx 平面に平行な平面の方程式は　$y=b$　[y 軸に垂直]

点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ を通り，xy 平面に平行な平面の方程式は　$z=c$　[z 軸に垂直]

$\boxed{3}$ 球面の方程式

1　点 $(a,\ b,\ c)$ を中心とする半径 r の球面の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

とくに，原点を中心とする半径 r の球面の方程式は

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

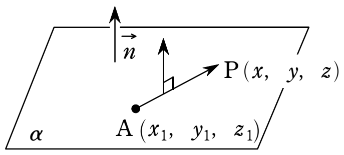
2　一般形

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$ を展開すると，球面の方程式は，一般に次の形であることがわかる。

$$x^2+y^2+z^2+kx+ly+mz+n=0\quad (\text{ただし，} k^2+l^2+m^2-4n>0)$$

4　平面の方程式　発展

$A(x_1,\ y_1,\ z_1)$ を通りベクトル $\vec{n}=(a,\ b,\ c)\ (\neq \vec{0})$ に垂直な平面を α とする。



α 上の任意の点 $P(x,\ y,\ z)$ について

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$　[平面のベクトル方程式]

が成り立つから，α の方程式は

$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$

このことから，平面の方程式は，x，y，z についての1次方程式で表されることがわかる。

5　直線の方程式　発展

$A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ とし，s，t は実数の変数とする。

1　点Aを通り，$\vec{d}\ (\neq\vec{0})$ に平行な直線　$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{d}$

$A(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\vec{d}=(l,\ m,\ n)$，$\vec{p}=(x,\ y,\ z)$ とすると

$(x,\ y,\ z)=(x_1,\ y_1,\ z_1)+t(l,\ m,\ n)$

$x=x_1+lt$，$y=y_1+mt$，$z=z_1+nt$　[直線の媒介変数表示]

参考　変数 t を消去すると，次の式が得られる。

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$$　[直線の方程式]

2　異なる2点A，Bを通る直線

$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

または　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$　ただし　$s+t=1$