

第3章 数学と人間の活動

2 0 約数と倍数

1 約数と倍数

2つの整数  $a, b$  について、ある整数  $k$  を用いて  $a = bk$  と表されるとき、 $b$  は  $a$  の 約数 であるといい、 $a$  は  $b$  の 倍数 であるという。  
注 1 と  $-1$  はすべての整数の約数であり、0 はすべての整数の倍数である。

2 倍数の判定法

- 2の倍数 …… 一の位が0, 2, 4, 6, 8のいずれか
- 5の倍数 …… 一の位が0, 5
- 10の倍数 …… 一の位が0
- 4の倍数 …… 下2桁が4の倍数
- 8の倍数 …… 下3桁が8の倍数
- 3の倍数 …… 各位の数の和が3の倍数
- 9の倍数 …… 各位の数の和が9の倍数

研究 等式を満たす整数  $x, y$  の組

1  $x, y$  の2次不定方程式の整数解

整数  $x, y$  が等式  $xy = 3$  を満たすとき、 $x, y$  はそれぞれ3の約数である。  
この等式を満たす整数  $x, y$  の組をすべて求めると、次のようになる。  
 $(x, y) = (1, 3), (3, 1), (-1, -3), (-3, -1)$   
この考え方を利用すると、次のような等式を満たす整数  $x, y$  の組がすべて求められる。  
 $xy + ax + by = c$  ( $a, b, c$  は整数)  
 $xy + ax + by = (x + b)(y + a) - ab$  であることを利用して、(整数)  $\times$  (整数) = 整数 の形に変形し、次のことを利用する。  
 $A, B, C$  は整数とする。  $AB = C$  のとき、 $A, B$  は  $C$  の約数

2 1 素数と素因数分解

1 素数と素因数分解

素 数 2以上の自然数で、正の約数が1とその数自身のみである数  
合成数 2以上の自然数で、素数でない数  
注 1は素数でも合成数でもない。  
因 数 整数がいくつかの整数の積で表されるとき、積を作る1つ1つの整数  
素因数 素数である因数  
素因数分解 自然数を素数だけの積の形に表すこと

2 約数の個数

自然数  $N$  の素因数分解が  $N = p^a \cdot q^b \cdot r^c \cdot \dots$  となるとき、 $N$  の正の約数の個数は  $(a + 1)(b + 1)(c + 1) \cdot \dots$  である。

補 自然数の積と素因数の個数、素数の問題

1 素数の性質

2つの自然数  $a, b$  ( $a < b$ ) について、次のことが成り立つ。  
積  $ab$  が素数  $\iff a = 1$  かつ  $b$  が素数

2 2 最大公約数・最小公倍数

1 最大公約数・最小公倍数

- 1 公約数 2つ以上の整数について、共通する約数  
最大公約数 公約数のうち最大のもの  
公倍数 2つ以上の整数について、共通する倍数  
最小公倍数 正の公倍数のうち最小のもの
- 2 公約数は最大公約数の約数、公倍数は最小公倍数の倍数である。

2 互いに素

- 1 2つの整数  $a, b$  の最大公約数が1であるとき、 $a, b$  は 互いに素 であるという。  
2つの整数  $a, b$  が互いに素であることと、 $a, b$  に共通な素因数がないことは同じことである。
- 2  $a, b, c$  は整数で、 $a, b$  が互いに素であるとき、次のことが成り立つ。  
①  $ac$  が  $b$  の倍数であるとき、 $c$  は  $b$  の倍数である。  
②  $a$  の倍数であり、 $b$  の倍数でもある整数は、 $ab$  の倍数である。

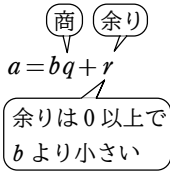
研究 最大公約数・最小公倍数の性質

2つの自然数  $a, b$  の最大公約数を  $g$ 、最小公倍数を  $l$  とする。  
 $a = ga', b = gb'$  であるとする、次のことが成り立つ。  
1  $a', b'$  は互いに素である。      2  $l = ga'b'$       3  $ab = gl$

2 3 整数の割り算

1 整数の割り算

整数  $a$  と正の整数  $b$  について、  
 $a = bq + r, 0 \leq r < b$   
となる整数  $q, r$  は1通りに定まる。  
 $q$  を、 $a$  を  $b$  で割ったときの 商、  
 $r$  を、 $a$  を  $b$  で割ったときの 余り という。  
 $r = 0$  のとき、 $a$  は  $b$  で 割り切れる といい、  
 $r \neq 0$  のとき、 $a$  は  $b$  で 割り切れない という。



2 余りによる整数の分類

- すべての整数は、次のように分類できる。ただし、 $k$  は整数、 $m$  は正の整数である。
- 1 2で割ったときの余りで分類  
 $\rightarrow 2k, 2k + 1$  (偶数と奇数)
  - 2 3で割ったときの余りで分類  
 $\rightarrow 3k, 3k + 1, 3k + 2$
  - 3  $m$ で割ったときの余りで分類  
 $\rightarrow mk, mk + 1, \dots, mk + (m - 1)$

整数についての事柄(とくに倍数や余りに関する性質)を証明するときは、整数である正の整数で割ったときの余りで分類すると示しやすいことがある。

3 連続する整数の積の性質

- 1 連続する2つの整数の積は2の倍数(偶数)である。
- 2 連続する3つの整数の積は6の倍数(2の倍数かつ3の倍数)である。

研究 和、差、積の余り

- $m, k$  を正の整数とし、2つの整数  $a, b$  を  $m$  で割った余りを、それぞれ  $r, r'$  とする。
- 1  $a + b$  を  $m$  で割った余りは、 $r + r'$  を  $m$  で割った余りに等しい。
  - 2  $a - b$  を  $m$  で割った余りは、 $r - r'$  を  $m$  で割った余りに等しい。
  - 3  $ab$  を  $m$  で割った余りは、 $rr'$  を  $m$  で割った余りに等しい。
  - 4  $a^k$  を  $m$  で割った余りは、 $r^k$  を  $m$  で割った余りに等しい。

発展 合同式

- $m, k$  は正の整数、 $a, b, c, d$  は整数とする。
- 1  $a$  を  $m$  で割ったときの余りと  $b$  を  $m$  で割ったときの余りが等しいとき、 $a$  と  $b$  は  $m$  を 法 として 合同 であるといい、式で  $a \equiv b \pmod{m}$  と表す。  
このような式を 合同式 という。  
 $a \equiv b \pmod{m}$  は、 $a - b$  が  $m$  の倍数であることと同じである。
  - 2 合同式について、次のことが成り立つ。  
[1]  $a \equiv a \pmod{m}$   
[2]  $a \equiv b \pmod{m}$  のとき  $b \equiv a \pmod{m}$   
[3]  $a \equiv b \pmod{m}, b \equiv c \pmod{m}$  のとき  $a \equiv c \pmod{m}$   
 $a \equiv c \pmod{m}, b \equiv d \pmod{m}$  のとき  
①  $a + b \equiv c + d \pmod{m}$       ②  $a - b \equiv c - d \pmod{m}$   
③  $ab \equiv cd \pmod{m}$       ④  $a^k \equiv c^k \pmod{m}$   
注  $a \equiv b \pmod{m}, b \equiv c \pmod{m}$  を、 $a \equiv b \equiv c \pmod{m}$  と書いてもよい。

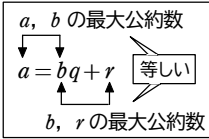
2 4 ユークリッドの互除法, 1 次不定方程式

1 割り算と最大公約数

自然数  $a, b$  について,  $a$  を  $b$  で割ったときの余りを  $r$  とすると, 次が成り立つ。

$a$  と  $b$  の最大公約数は,  $b$  と  $r$  の最大公約数に等しい。

【参考】 等式  $a=bq+r$  を満たす自然数  $a, b, q, r$  について  $a$  と  $b$  の最大公約数は,  $b$  と  $r$  の最大公約数に等しい。



2 ユークリッドの互除法

2 つの自然数  $a, b$  ( $a > b$ ) の最大公約数  $g$  を求めるには, 次の手順を繰り返せばよい。

- ①  $a$  を  $b$  で割った余りを  $r$  とする。
- ②  $r=0$  ならば,  $b$  が最大公約数  $g$  である。  
 $r \neq 0$  ならば,  $a$  を  $b$  で,  $b$  を  $r$  で置き換えて ① に戻る。  
( $b$  を  $r$  で割った余りを求める)

この手順を繰り返すと必ず  $r=0$  になるから, そのときの割る数が  $g$  である。

3 互いに素である整数の性質

2 つの整数  $a, b$  が互いに素であるとき, どんな整数  $c$  についても,  $ax+by=c$  を満たす整数  $x, y$  が存在する。

4 1 次不定方程式とその整数解

- 1  $a, b, c$  は整数の定数で,  $a \neq 0, b \neq 0$  とする。  
 $x, y$  の 1 次方程式  $ax+by=c$  を成り立たせる整数  $x, y$  の組を, この方程式の **整数解** という。  
また, この方程式の整数解を求めることを **1 次不定方程式** を解くという。

- 2 2 つの整数  $a, b$  が互いに素であるとする。
  - ① 方程式  $ax+by=0$  のすべての整数解は  
 $x=bk, y=-ak$  ( $k$  は整数)
  - ②  $c$  が整数のとき, 方程式  $ax+by=c$  のすべての整数解は, 方程式  $ax+by=1$  の整数解の 1 つを  $x=p, y=q$  とすると  
 $x=bk+cp, y=-ak+cq$  ( $k$  は整数)

【注】 1 次不定方程式の解の表し方は 1 通りではない。  
たとえば,  
 $x=2k+1, y=3k+2$  ( $k$  は整数) と  $x=2k-1, y=3k-1$  ( $k$  は整数)  
は形が異なるが, 整数解全体としては同じものを表す。

2 5  $n$  進法

1  $n$  進法

- 1 各位の数字を上位の位から並べて数を表す方法を **位取り記数法** という。  
 $n$  を 2 以上の自然数とすると, 位取りの基礎となる数を  $n$  として数を表す方法を  **$n$  進法** という。位取りの基礎となる数を **底** という。
- 2  $n$  進法で表された数は右下に  $(n)$  をつけて表す。  
なお, 10 進法ではふつう  $(10)$  を省略する。  
【例】 2 進法で表された数 10011 は  $10011_{(2)}$  と書く。

2 底の変換

- 10 進法で表された数を  $n$  進法で表すには, 次の手順による。
  - ① 割る数を  $n$  として割り算を行い, 商と余りを求める。
  - ② 得られた商について同様の割り算を商が 0 になるまで繰り返す。
  - ③ 出てきた余りを逆に並べる。

【例】  $13=1 \cdot 2^3+1 \cdot 2^2+0 \cdot 2^1+1 \cdot 2^0=1101_{(2)}$

2 ) 13

2 ) 6

2 ) 3

2 ) 1

0

余り

...

...

...

...

13=2・6+1

6=2・3+0

3=2・1+1

1=2・0+1

3  $n$  進法の小数

$n$  進法的小数では, 小数点以下の位は,  $\frac{1}{n^1}$  の位,  $\frac{1}{n^2}$  の位,  $\frac{1}{n^3}$  の位, …… である。

【例】  $0.342_{(5)}=3 \cdot \frac{1}{5^1}+4 \cdot \frac{1}{5^2}+2 \cdot \frac{1}{5^3}=0.776$

- 10 進法で表された小数 (1 未満) を  $n$  進法的小数で表すには, 次の手順による。
  - ①  $n$  を掛ける掛け算を行い, 得られた数の整数部分と小数部分を求める。
  - ② 得られた小数部分について同様の掛け算を積が整数になるまで繰り返す。
  - ③ 出てきた整数部分を順に並べる。

【例】  $0.625=1 \cdot \frac{1}{2^1}+0 \cdot \frac{1}{2^2}+1 \cdot \frac{1}{2^3}=0.101_{(2)}$

0.625

× 2

1.25

× 2

0.5

× 2

1

← 0.625 × 2

← 0.25 × 2

← 0.5 × 2

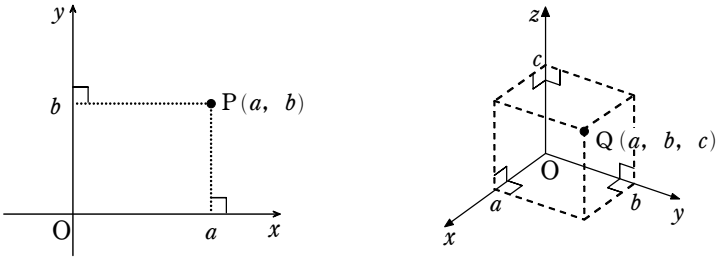
4 2 進法で表された数の四則計算

2 進法で表された数の足し算, 引き算, 掛け算では, 次の計算が基本である。  
足し算  $0_{(2)}+0_{(2)}=0_{(2)}, 1_{(2)}+0_{(2)}=1_{(2)}, 0_{(2)}+1_{(2)}=1_{(2)}, 1_{(2)}+1_{(2)}=10_{(2)}$   
引き算  $0_{(2)}-0_{(2)}=0_{(2)}, 1_{(2)}-0_{(2)}=1_{(2)}, 1_{(2)}-1_{(2)}=0_{(2)}, 10_{(2)}-1_{(2)}=1_{(2)}$   
掛け算  $0_{(2)} \times 0_{(2)}=0_{(2)}, 1_{(2)} \times 0_{(2)}=0_{(2)}, 0_{(2)} \times 1_{(2)}=0_{(2)}, 1_{(2)} \times 1_{(2)}=1_{(2)}$   
2 進法の割り算は, 10 進法の割り算と同様に, 掛け算と引き算を組み合わせで行う。

補 座標の考え方

1 平面上の点の位置, 空間の点の位置

- 1 平面上の点で,  $x$  座標が  $a$ ,  $y$  座標が  $b$  であるような点 P の座標は  $(a, b)$  で表される。
- 2 空間の点で,  $x$  座標が  $a$ ,  $y$  座標が  $b$ ,  $z$  座標が  $c$  であるような点 Q の座標は  $(a, b, c)$  で表される。



2 2 点間の距離

- 1 座標平面における 2 点 A ( $x_1, y_1$ ), B ( $x_2, y_2$ ) 間の距離は

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

特に, 原点 O と点 A の距離は  $OA=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

- 2 座標空間における 2 点 C ( $x_1, y_1, z_1$ ), D ( $x_2, y_2, z_2$ ) 間の距離は

$$CD=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特に, 原点 O と点 C の距離は  $OC=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$