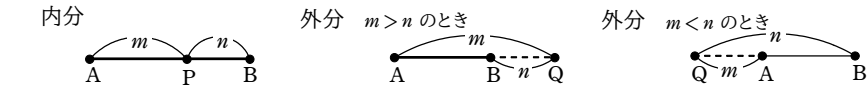


第2章 図形の性質

1 1 三角形の辺の比

① 線分の内分, 外分

次の図において, 点 P は線分 AB を $m:n$ に 内分する 点,
点 Q は線分 AB を $m:n$ に 外分する 点という。

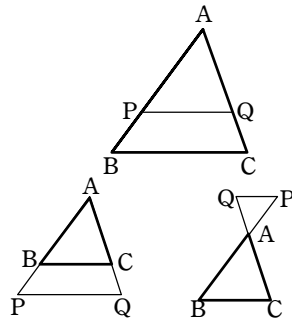


② 平行線と比

△ABC において, 辺 AB 上に点 P があり,
辺 AC 上に点 Q があるとき, 次が成り立つ。

- 1 $PQ \parallel BC \iff AP:AB=AQ:AC$
- 2 $PQ \parallel BC \iff AP:PB=AQ:QC$
- 3 $PQ \parallel BC \implies AP:AB=PQ:BC$

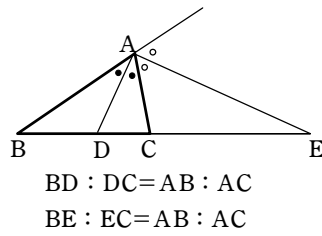
これらは, 右の図のように, 辺 AB, AC の延長
上にそれぞれ点 P, Q があるときも成り立つ。



③ 三角形の角の二等分線と比

定理 1 △ABC の ∠A の二等分線と辺 BC との交
点 D は, 辺 BC を $AB:AC$ に内分する。
すなわち $BD:DC=AB:AC$

定理 2 $AB \neq AC$ である △ABC の ∠A の外角の
二等分線と辺 BC の延長との交点 E は,
辺 BC を $AB:AC$ に外分する。
すなわち $BE:EC=AB:AC$



1 2 三角形の外心・内心・重心

① 三角形の外心・内心・重心

定理 3 三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点 (外心) で交わる。

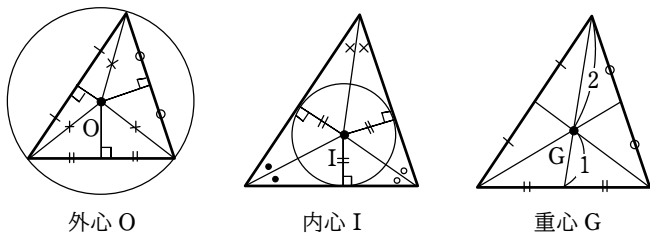
〔補足〕 その点は 3 つの頂点から等距離にある。(外接円の中心)

定理 4 三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点 (内心) で交わる。

〔補足〕 その点は 3 つの辺から等距離にある。(内接円の中心)

定理 5 三角形の 3 本の中線は 1 点 (重心) で交わり, その点は各中線を 2:1 に内分
する。

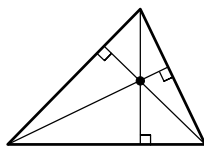
〔注〕 三角形の頂点とそれに向かい合う辺の中点を結ぶ線分を, 三角形の 中線
という。



〔補〕 三角形の垂心

① 三角形の垂心

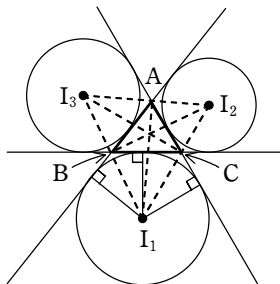
三角形の 3 つの頂点から, 向かい合う辺またはその延長に下
ろした垂線は 1 点で交わる。この点を三角形の 垂心 という。



〔補足〕 三角形の傍心

① 三角形の傍心

- 1 三角形の 1 つの頂点における内角の二等分線と,
他の 2 つの頂点における外角の二等分線は 1 点
で交わる。この点を 傍心 という。
- 2 傍心を中心として, 2 辺の延長と残りの 1 辺に
接する円を 傍接円 という。
- 3 傍心, 傍接円は, 三角形の 3 つの角の内部に
1 つずつある。



② 三角形の五心

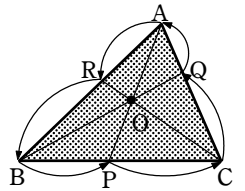
三角形の外心, 内心, 重心, 垂心, 傍心を 三角形の五心 という。

1 3 チェバの定理・メネラウスの定理

① チェバの定理

定理 6 △ABC の内部に点 O がある。頂点 A, B, C と
O を結ぶ直線が, 向かい合う辺とそれぞれ点 P,
Q, R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

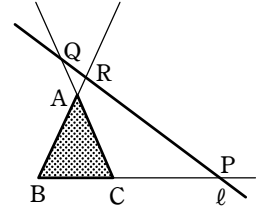
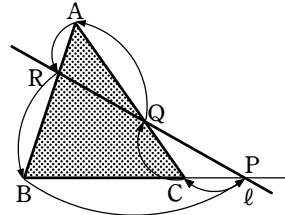


② メネラウスの定理

定理 7 △ABC の辺 BC, CA, AB またはその延長が, 三角形の頂点を通らない直
線 ℓ と, それぞれ点 P, Q, R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

P が辺 BC の延長上にある場合 さらに, Q が辺 CA の延長上,
R が辺 BA の延長上にある場合



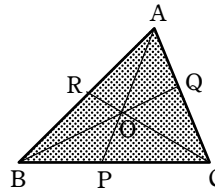
〔研究〕 チェバの定理の逆, メネラウスの定理の逆

① チェバの定理

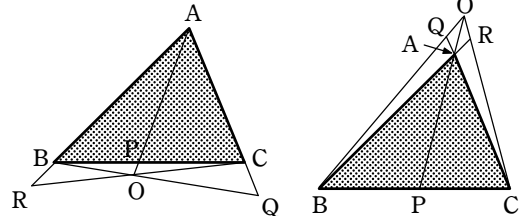
定理 6' △ABC の辺上にもその延長上にもない点 O がある。頂点 A, B, C と O を
結ぶ直線 AO, BO, CO が, 向かい合う辺 BC, CA, AB またはその延長と,
それぞれ点 P, Q, R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

O が △ABC の内部にあるとき



O が △ABC の外部にあるとき

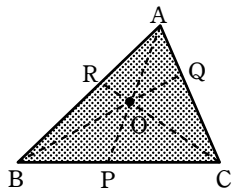


② チェバの定理の逆 (定理 6' の逆)

△ABC の辺 BC, CA, AB またはその延長上に,
それぞれ点 P, Q, R があり, この 3 点のうち,
1 個または 3 個が辺上にあるとする。このとき,

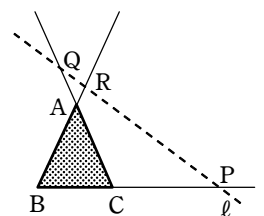
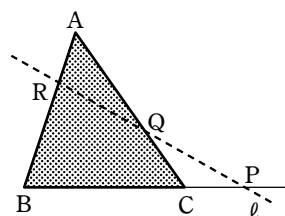
$$BQ \text{ と } CR \text{ が交わり, かつ } \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \text{ が}$$

成り立てば, 3 直線 AP, BQ, CR は 1 点で交わる。



③ メネラウスの定理の逆

△ABC の辺 BC, CA, AB またはその延長上に, それぞれ点 P, Q, R があり,
この 3 点のうち, 1 個または 3 個が辺の延長上にあるとき, $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$ が
成り立てば, 3 点 P, Q, R は一直線上にある。



研究 三角形の辺と角

1 三角形の3辺の大小関係

1つの三角形において

- [1] 2辺の長さの和は、他の1辺の長さよりも大きい。
- [2] 2辺の長さの差は、他の1辺の長さよりも小さい。

2 三角形の存在条件

正の数 a, b, c を3辺の長さとする三角形が存在するための条件は、 $|b - c| < a < b + c$ が成り立つことである。

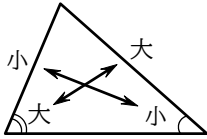
参考 3辺の長さ a, b, c の中で、 a が最大であれば、三角形が存在するための条件は、 $a < b + c$ が成り立つことである。

3 三角形の辺と角の大小関係

三角形の2辺の大小関係は、その向かい合う角の大小関係と一致する。

$\triangle ABC$ において、次が成り立つ。

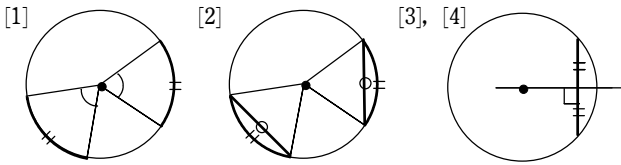
- $b > c \iff \angle B > \angle C$
- $b = c \iff \angle B = \angle C$
- $b < c \iff \angle B < \angle C$



1.4 円に内接する四角形

1 円の弧と弦の性質

- [1] 1つの円で、等しい中心角に対する弧の長さは等しい。
逆に、長さの等しい弧に対する中心角は等しい。
- [2] 1つの円で、長さの等しい弧に対する弦の長さは等しい。
- [3] 弦の垂直二等分線は、円の中心を通る。
- [4] 円の中心から弦に引いた垂線は、その弦を2等分する。

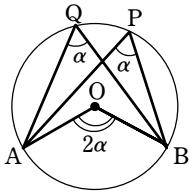


2 円周角の定理

円周角の定理

1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり、その弧に対する中心角の大きさの半分である。

図 異なる3点 A, B, P について、次が成り立つ。
点 P が線分 AB を直径とする円の周上にある
 $\iff \angle APB = 90^\circ$

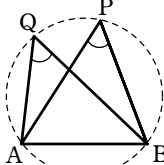


円周角の定理の逆

4点 A, B, P, Q について、点 P, Q が直線 AB に関して同じ側にあって

$$\angle APB = \angle AQB$$

ならば、4点 A, B, P, Q は1つの円周上にある。

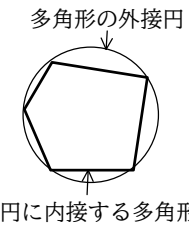


3 円に内接する四角形

多角形のすべての頂点が1つの円周上にあるとき、この多角形は円に内接する という。

また、この円をその多角形の 外接円 といい、円は多角形に 外接する という。

図 三角形には必ず外接円が存在するが、三角形以外の多角形には外接円が存在するとは限らない。

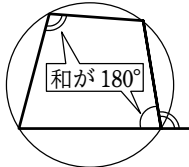


定理8 円に内接する四角形について、次の[1], [2]が成り立つ。

- [1] 対角の和は 180° である。
- [2] 内角は、その対角の外角に等しい。

定理9 次の[1]または[2]が成り立つ四角形は、円に内接する。

- [1] 1組の対角の和が 180° である。
- [2] 内角が、その対角の外角に等しい。



1.5 円と直線

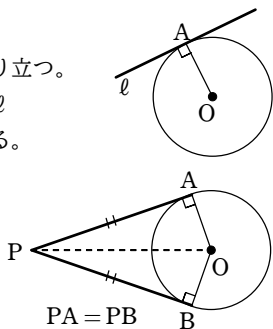
1 円の接線

1 円 O の周上の点 A を通る直線 ℓ について、次が成り立つ。
直線 ℓ が点 A で円 O に接する $\iff OA \perp \ell$

図 この直線 ℓ が、点 A における円 O の接線である。

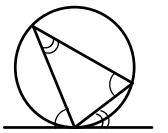
2 円の外部の1点からその円に引いた2つの接線の長さは等しい。

図 右の図において、点 A, B が接点のとき、線分 PA または PB の長さを、 P から円 O に引いた 接線の長さ という。



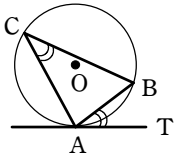
2 円の接線と弦の作る角

定理10 円の接線とその接点を通る弦の作る角は、その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



補足 円の接線と弦の作る角の定理の逆 (定理10の逆)

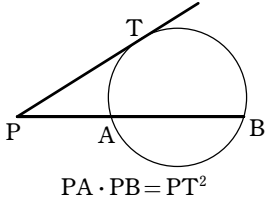
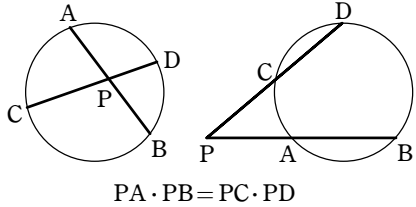
円 O の弧 AB と半直線 AT が直線 AB に関して同じ側にあり、弧 AB に対する円周角 $\angle ACB$ が $\angle BAT$ と等しいとき、直線 AT は円 O の接線である。



3 方べきの定理

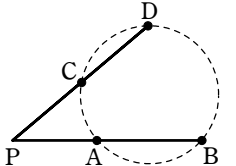
定理11 円の2つの弦 AB と CD 、またはそれらの延長が点 P で交わるとき、 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ が成り立つ。

定理12 円の外部の点 P から円に引いた接線の接点を T とする。 P を通ってこの円と2点 A, B で交わる直線を引くと、 $PA \cdot PB = PT^2$ が成り立つ。



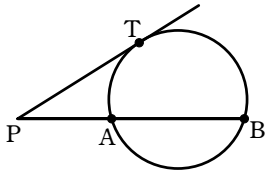
研究 方べきの定理の逆 (定理11の逆)

2つの線分 AB と CD 、またはそれらの延長が点 P で交わるとき、 $PA \cdot PB = PC \cdot PD$ が成り立つならば、4点 A, B, C, D は1つの円周上にある。



補足 定理12についても、その逆である次のことが成り立つ。

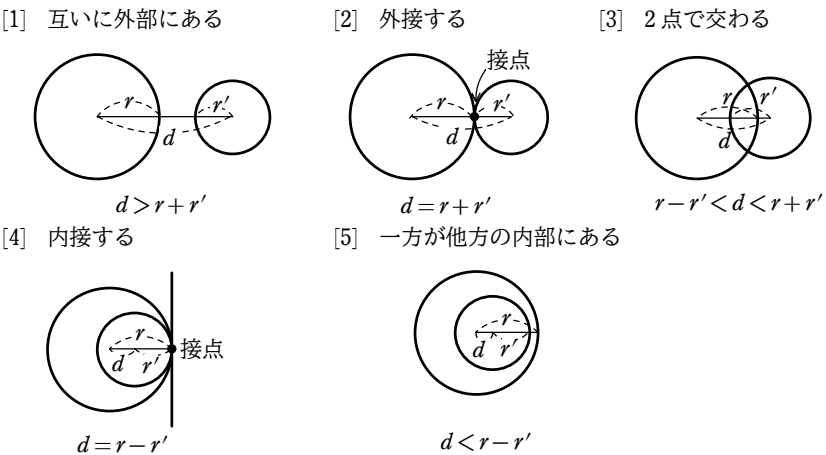
一直線上にない3点 A, B, T および線分 AB の延長上の点 P について、 $PA \cdot PB = PT^2$ が成り立つならば、直線 PT は3点 A, B, T を通る円に接する。



1.6 2つの円

1 2つの円の位置関係

2つの円の半径を r, r' ($r > r'$)、中心間の距離を d とする。
2つの円の位置関係には、次のような場合がある。



2 2つの円の共通接線

2つの円の両方に接する直線を、2つの円の 共通接線 という。
2つの円の共通接線には、次のような場合がある。

