

<div>準備 集合</div> <div>1 集合</div> <div>範囲がはっきりしたものの集まりを 集合 といい、集合を構成している1つ1つのものを、その集合の 要素 という。</div> <div>集合の表し方 ① { }の中に要素を書き並べて表す。例 <math>A=\{1, 2, 4, 8\}</math></div> <div>② 要素の満たす条件を書いて表す。例 <math>A=\{x \mid x \text{ は } 8 \text{ の正の約数}\}</math></div> <div><math>x \in A</math> (<math>x</math> は <math>A</math> に属する) <math>x</math> が集合 <math>A</math> の要素である</div> <div><math>x \notin A</math> <math>x</math> が集合 <math>A</math> の要素でない</div> <div><math>A \subset B</math> (<math>A</math> は <math>B</math> の部分集合) 集合 <math>A</math> のすべての要素が集合 <math>B</math> の要素でもある</div> <div><math>A=B</math> (<math>A</math> と <math>B</math> は等しい) 集合 <math>A</math> と <math>B</math> の要素がすべて一致している</div> <div><math>\varnothing</math> (空集合) 要素が1つもない集合</div> <div>注 <math>A=B</math> であることは、「<math>A \subset B</math> かつ <math>A \supset B</math>」であることと同じである。</div> <div>また、空集合 <math>\varnothing</math> は、どんな集合に対しても、その部分集合であると約束する。</div> <div>2 共通部分と和集合</div> <div>1 <math>A \cap B</math> (<math>A</math> と <math>B</math> の共通部分) 集合 <math>A, B</math> のどちらにも属する要素全体の集合</div> <div><math>A \cup B</math> (<math>A</math> と <math>B</math> の和集合) 集合 <math>A, B</math> の少なくとも一方に属する要素全体の集合</div> <div>2 3つの集合の共通部分と和集合 研究</div> <div><math>A \cap B \cap C</math> (共通部分) 集合 <math>A, B, C</math> のすべてに属する要素全体の集合</div> <div><math>A \cup B \cup C</math> (和集合) 集合 <math>A, B, C</math> の少なくとも1つに属する要素全体の集合</div> <div>3 補集合</div> <div><math>\overline{A}</math> (補集合) 全体集合 <math>U</math> の部分集合 <math>A</math> に対して <math>U</math> の要素で <math>A</math> には属さない要素全体の集合</div> <div>補集合の性質 <math>U</math> を全体集合とし、<math>A, B</math> をその部分集合とするとき</div> <div><math>A \cap \overline{A} = \varnothing, A \cup \overline{A} = U, \overline{\overline{A}} = A, A \subset B</math> ならば <math>\overline{A} \supset \overline{B}</math></div> <div>注 <math>\overline{\overline{A}}</math> は <math>\overline{A}</math> の補集合を表す。</div> <div>ド・モルガンの法則 1 <math>\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}</math> 2 <math>\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}</math></div> <div>第1章 場合の数と確率</div> <div>1 集合の要素の個数</div> <div>1 集合の要素の個数</div> <div>集合 <math>A</math> の要素の個数が有限であるとき、その個数を <math>n(A)</math> で表す。</div> <div>空集合 <math>\varnothing</math> は要素が1つもない集合であるから、<math>n(\varnothing)=0</math> である。</div> <div>1 和集合の要素の個数</div> <div><math display="block">n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)</math></div> <div>とくに <math>A \cap B = \varnothing</math> のとき</div> <div><math display="block">n(A \cup B) = n(A) + n(B)</math></div> <div>2 補集合の要素の個数</div> <div><math display="block">n(\overline{A}) = n(U) - n(A)</math> ただし、<math>U</math> は全体集合</div> <div>参考 <math>n(\overline{A \cap B}) = n(\overline{A \cup B}) = n(U) - n(A \cup B)</math></div> <div><math display="block">n(\overline{A \cup B}) = n(\overline{A \cap B}) = n(U) - n(A \cap B)</math></div> <div>補 3つの集合の和集合の要素の個数</div> <div>1 3つの集合の和集合の要素の個数</div> <div>全体集合 <math>U</math> の3つの部分集合 <math>A, B, C</math> について、次の等式が成り立つ。</div> <div><math display="block">\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &amp;= n(A) + n(B) + n(C) \\ &amp;\quad - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) \\ &amp;\quad + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}</math></div> <div>2 場合の数</div> <div>1 場合の数</div> <div>樹形図 各場合を、枝分かれの形で表した図。</div> <div>樹形図は、起こりうるすべての場合を、もれなくかつ重複なく数え上げるのに便利である。</div> <div>表 2つの数の和が指定されている場合など、表にするとわかりやすい。</div> <div>辞書式配列法 アルファベット順や50音順などの規則に従って並べる方法。</div> <div>2 和の法則</div> <div>和の法則 2つの事柄 <math>A, B</math> は同時には起こらないとする。</div> <div><math>A</math> の起こり方が <math>a</math> 通りあり、<math>B</math> の起こり方が <math>b</math> 通りあれば、<math>A</math> または <math>B</math> の起こる場合は、<math>a+b</math> 通りある。</div> <div>和の法則は、3つ以上の事柄についても、同じように成り立つ。</div> <div>3 積の法則</div> <div>積の法則 事柄 <math>A</math> の起こり方が <math>a</math> 通りあり、そのどの場合に対しても事柄 <math>B</math> の起こり方が <math>b</math> 通りあれば、<math>A</math> が起こり、そして <math>B</math> が起こる場合は、<math>a \times b</math> 通りある。</div> <div>積の法則は、3つ以上の事柄についても、同じように成り立つ。</div> <div>3 順列</div> <div>1 順列</div> <div><math>n</math> 個から <math>r</math> 個取る順列 (異なる <math>n</math> 個のものから異なる <math>r</math> 個を取り出して並べる順列) の総数は <math>{}_n P_r = n(n-1)(n-2) \cdots (n-r+1)</math> (<math>r</math> 個の数の積)</div> <div>とくに <math>{}_n P_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1</math> (<math>n</math> の階乗)</div> <div>また、<math>{}_n P_0 = 1, 0! = 1</math> と定めると、<math>{}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}</math> とも表される。</div> <div>異なる <math>n</math> 個のもののすべてを並べる順列の総数は <math>n!</math></div> <div>4 円順列・重複順列</div> <div>1 円順列</div> <div>いくつかのものを円形に並べる順列を 円順列 という。</div> <div>円順列では、回転して並びが同じになるものは同じ並び方とみなす。</div> <div>異なる <math>n</math> 個のものの円順列の総数は <math>\frac{{}_n P_n}{n} = (n-1)!</math></div> <div>2 重複順列</div> <div><math>n</math> 個から <math>r</math> 個取る重複順列 (異なる <math>n</math> 種類のものから重複を許して <math>r</math> 個取り出して並べる順列) の総数は <math>n^r</math></div> <div>5 組合せ</div> <div>1 組合せ</div> <div><math>n</math> 個から <math>r</math> 個取る組合せ (異なる <math>n</math> 個のものから異なる <math>r</math> 個を取り出して作る組合せ) の総数は <math>{}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{r!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-r+1)}{r(r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}</math> (分母、分子ともに <math>r</math> 個の数の積)</div> <div>とくに <math>{}_n C_1 = n, {}_n C_n = 1</math></div> <div>また、<math>0! = 1, {}_n C_0 = 1</math> と定めると、<math>{}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}</math> とも表される。</div> <div><math>{}_n C_r</math> の性質 <math>{}_n C_r = {}_n C_{n-r}</math> ただし <math>0 \leq r \leq n</math></div> <div>参考 <math>{}_n C_r = {}_{n-1} C_{r-1} + {}_{n-1} C_r</math> ただし <math>1 \leq r \leq n-1, n \geq 2</math></div> <div>2 同じものを含む順列</div> <div><math>a</math> が <math>p</math> 個、<math>b</math> が <math>q</math> 個、<math>c</math> が <math>r</math> 個あるとき、それら全部を1列に並べる順列の総数は</div> <div><math display="block">{}_n C_p \times {}_{n-p} C_q = \frac{n!}{p!q!r!} \quad \text{ただし } p+q+r=n</math></div> <div>一般に、<math>n</math> 個のもののうち、<math>p</math> 個は同じもの、<math>q</math> 個は別の同じもの、<math>r</math> 個はまた別の同じもの、…… であるとき、これら <math>n</math> 個のものを全部を1列に並べる順列の総数は</div> <div><math display="block">{}_n C_p \times {}_{n-p} C_q \times {}_{n-p-q} C_r \times \cdots = \frac{n!}{p!q!r! \cdots}</math></div> <div>ただし <math>p+q+r+\cdots=n</math></div> <div>研究 重複を許して作る組合せ</div> <div>1 重複を許して作る組合せ</div> <div>異なる <math>n</math> 個のものから重複を許して <math>r</math> 個取って作る組合せ (重複組合せ) の総数は、<math>r</math> 個の <math>\bigcirc</math> と <math>(n-1)</math> 個の <math> </math> を並べる順列の総数に等しい。</div> <div>よって、その総数は <math>\frac{\{r+(n-1)\}!}{r!(n-1)!}</math> すなわち <math>{}_{n+r-1} C_r</math></div>	
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

6 事象と確率

① 試行と事象

- 1 同じ条件のもとで繰り返すことができ、その結果が偶然によって決まる実験や観測を 試行 という。  
また、試行の結果として起こる事柄を 事象 という。
- 2 1つの試行において、起こりうる結果全体を集合  $U$  で表すとき、 $U$  自身で表される事象を 全事象、 $U$  のただ1つの要素からなる集合で表される事象を 根元事象 という。

② 確率

ある試行において、どの根元事象が起こることも同程度に期待できるとき、これらの根元事象は 同様に確からしい という。このような試行において、事象  $A$  の確率  $P(A)$  は 
$$P(A) = \frac{\text{事象 } A \text{ の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}} = \frac{n(A)}{n(U)}$$
 ただし、 $U$  は全事象

7 確率の基本性質

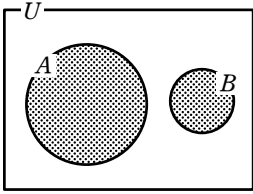
① 積事象と和事象

$A, B$  の 積事象 ( $A \cap B$ )  $A$  と  $B$  がともに起こる事象  
 $A, B$  の 和事象 ( $A \cup B$ )  $A$  または  $B$  が起こる事象

② 排反事象

2つの事象  $A, B$  が決して同時に起こらないとき、  
 $A, B$  は互いに 排反 である  
または  
 $A, B$  は互いに 排反事象 である  
という。

$A, B$  が互いに排反であることは、 $A \cap B = \emptyset$  と同じである。  
空集合  $\emptyset$  で表される事象を 空事象 という。空事象は決して起こらない事象である。



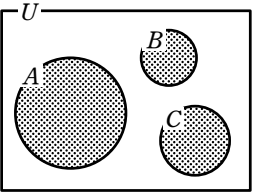
③ 確率の基本性質

- 1 どんな事象  $A$  についても  $0 \leq P(A) \leq 1$   
とくに、空事象  $\emptyset$  について  $P(\emptyset) = 0$   
全事象  $U$  について  $P(U) = 1$

2 確率の加法定理

事象  $A, B$  が互いに排反であるとき  
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$
  
事象  $A, B, C$  が互いに排反である (どの2つの事象も互いに排反である) とき、3つの事象のいずれかが起こる確率  $P(A \cup B \cup C)$  は  
$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

④ 4つ以上の排反な事象についても、3つの場合の加法定理と同様なことが成り立つ。

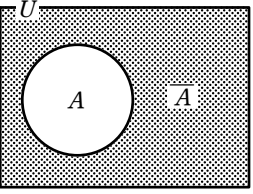


④ 余事象と確率

事象  $A$  に対して、 $A$  が起こらないという事象を、 $A$  の 余事象 といい、 $\overline{A}$  で表す。  
 $A$  と  $\overline{A}$  は互いに排反である。

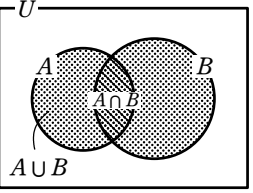
$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

すなわち  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$



⑤ 一般の和事象の確率

2つの事象  $A, B$  について  
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



8 独立な試行と確率

① 独立な試行の確率

- 1 いくつかの試行において、どの試行の結果も他の試行の結果に影響を与えないとき、これらの試行は 独立 であるという。
- 2 2つの試行  $S$  と  $T$  が独立であるとき、 $S$  で事象  $A$  が起こり、かつ  $T$  で事象  $B$  が起こる確率  $p$  は、 $P(A)$  と  $P(B)$  の積に等しい。すなわち  $p = P(A) \times P(B)$   
独立な3つ以上の試行についても、同様なことが成り立つ。

② 反復試行の確率

- 1 同じ条件のもとでの試行の繰り返しを 反復試行 という。1つの試行を何回か繰り返すとき、これらの試行は独立である。
- 2 1回の試行で事象  $A$  の起こる確率を  $p$  とする。この試行を  $n$  回行う反復試行で、 $A$  がちょうど  $r$  回起こる確率は 
$${}_nC_r p^r (1-p)^{n-r}$$
 ただし、正の数  $a$  に対して、 $a^0 = 1$  と定める。

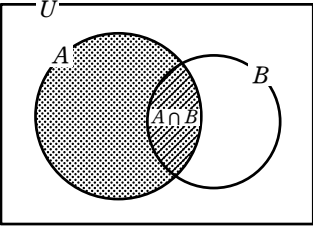
9 条件付き確率

① 条件付き確率

1つの試行における2つの事象  $A, B$  について、事象  $A$  が起こったとして、そのときに事象  $B$  の起こる確率  $P_A(B)$  は

$$P_A(B) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

ただし  $n(A) \neq 0, P(A) \neq 0$   
( $A$  が起こったときの  $B$  が起こる 条件付き確率)



② 確率の乗法定理

2つの事象  $A, B$  がともに起こる確率  $P(A \cap B)$  は  
$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B) \quad \text{ただし} \quad P(A) \neq 0$$

④ 3つ以上の事象の場合についても、2つの場合の確率の乗法定理と同様なことが成り立つ。

研究 原因の確率

① 原因の確率

事象  $E$  が起こる原因として事象  $A, B$  の2つが考えられるとき、事象  $E$  が起こったことを知って、それが原因  $A$  から起こったと考えられる確率  $P_E(A)$  を 原因の確率 といふことがある。

10 期待値

① 期待値

ある試行の結果に応じて、 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  のどれか1つの値をとる数量  $X$  があり、 $X$  のとる値と確率が右の表のようなとき、 $X$  の期待値は

$X$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\cdots$	$x_n$	計
確率	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\cdots$	$p_n$	1

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \cdots + x_n p_n \quad \text{ただし、} p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$$

② 期待値の応用

期待値の考えを、結果が不確実な状況下において、どの選択が有利かを判断する際の基準として利用することができる。