第２章　図形の性質

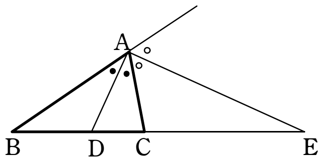
第１節　平面図形

１　三角形の辺の比

1　三角形の角の二等分線と比

定理１　△ABC の∠A の二等分線と辺 BC との交点は，辺 BC を AB : AC に内分する。

定理２　AB≒AC である △ABC の ∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点は，辺 BC を AB : AC に外分する。



BD : DC＝AB : AC
BE : EC＝AB : AC

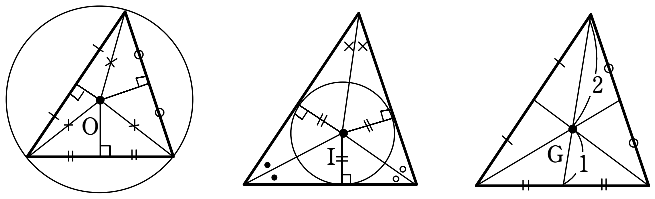
２　三角形の外心・内心・重心

1　三角形の外心・内心・重心

定理３　三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点 (**外心**) で交わる。

定理４　三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点 (**内心**) で交わる。

定理５　三角形の 3 本の中線は 1 点 (**重心**) で交わり，その点は各中線を 2 : 1 に内分する。

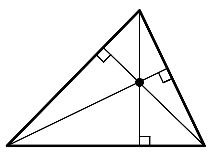


外心 O　　内心 I　　重心 G

補　三角形の垂心

1　三角形の垂心

三角形の各頂点から向かい合う辺またはその延長に下ろした垂線は 1 点で交わる。この点を三角形の **垂心** という。

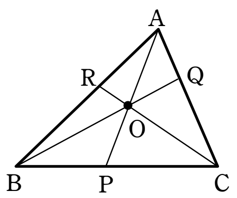


３　チェバの定理・メネラウスの定理

1　チェバの定理

定理６　△ABC の内部に点 O がある。頂点 A，B，C と O を結ぶ直線が，向かい合う辺とそれぞれ点 P，Q，R で交わるとき

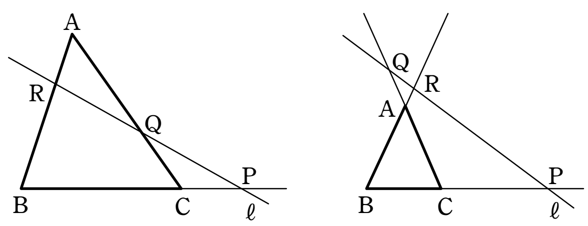
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



2　メネラウスの定理

定理７　△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長が，三角形の頂点を通らない直線 ℓ と，それぞれ点 P，Q，R で交わるとき

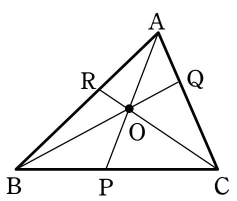
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



補　チェバの定理の逆・メネラウスの定理の逆

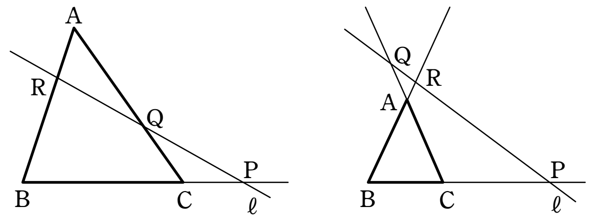
1　チェバの定理の逆

△ABC の辺 BC，CA，AB 上に，それぞれ点 P，Q，R があり，$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ が成り立てば，3 直線 AP，BQ，CR は 1 点で交わる。



2　メネラウスの定理の逆

△ABC の辺 BC，CA，AB またはその延長上に，それぞれ点 P，Q，R があり，この 3 点のうち 1 個または 3 個が辺の延長上にあるとき，$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$ が成り立てば，3 点 P，Q，R は一直線上にある。



補　三角形の面積と比

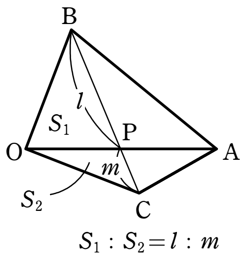
1　三角形の面積と比

1　高さが等しい 2 つの三角形の面積の比は，底辺の長さの比に等しい。

2　底辺の長さが等しい 2 つの三角形の面積の比は，高さの比に等しい。

3　底辺 OA を共有する △OAB，△OAC において，2 直線 AO，BC が点 P で交わるとすると

△OAB : △OAC＝PB : PC



$S_1 : S_2 = l : m$

研究　三角形の比と角

1　三角形の 3 辺の大小関係

1 つの三角形において

[1]　2 辺の長さの和は，他の 1 辺の長さよりも大きい。

[2]　2 辺の長さの差は，他の 1 辺の長さよりも小さい。

2　三角形の存在条件

正の数 a，b，c を 3 辺の長さとする三角形が存在するための条件は，$|b-c|<a<b+c$ が成り立つことである。

参考　3 辺の長さ a，b，c の中で，a が最大であれば，三角形が存在するための条件は，$a<b+c$ が成り立つことである。

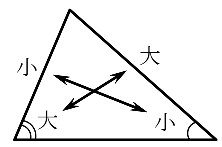
3　三角形の辺と角の大小関係

△ABC において，次が成り立つ。

$b>c \iff \angle B>\angle C$

$b=c \iff \angle B=\angle C$

$b<c \iff \angle B<\angle C$



４　円に内接する四角形

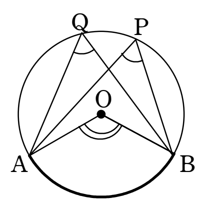
1　円周角の定理

円周角の定理

1 つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の大きさの半分である。

注　異なる 3 点 A，B，P について，次が成り立つ。

点 P が線分 AB を直径とする円の周上にある
$\iff \angle APB=90°$

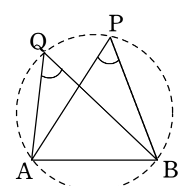


円周角の定理の逆

4 点 A，B，P，Q について，点 P，Q が直線 AB に関して同じ側にあって

∠APB＝∠AQB

ならば，4 点 A，B，P，Q は 1 つの円周上にある。



2　円に内接する四角形

定理８　円に内接する四角形について，次の [1]，[2] が成り立つ。

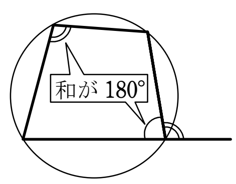
[1]　対角の和は 180° である。

[2]　内角は，その対角の外角に等しい。

定理９　次の [1] または [2] が成り立つ四角形は，円に内接する。

[1]　1 組の対角の和が 180° である。

[2]　内角が，その対角の外角に等しい。



５　円と直線

1　円の接線

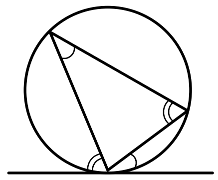
1　円 O の周上の点 A を通る直線 ℓ について，次が成り立つ。

直線 ℓ が点 A で円 O に接する $\iff$ OA⊥ℓ

2　円の外部の 1 点からその円に引いた 2 つの接線の長さは等しい。

2　円の接線と弦の作る角

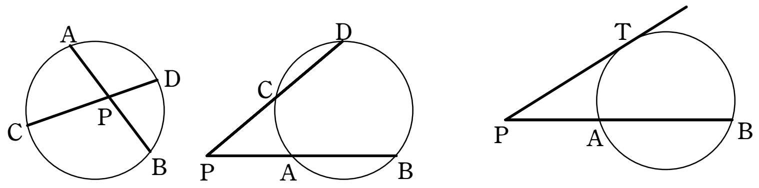
定理１０　円の接線とその接点を通る弦の作る角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



3　方べきの定理

定理１１　円の２つの弦 AB，CD の交点，またはそれらの延長の交点を P とすると，PA・PB＝PC・PD が成り立つ。

定理１２　円の外部の点 P から円に引いた接線の接点を T とする。P を通ってこの円と２点 A，B で交わる直線を引くと，PA・PB＝PT² が成り立つ。



PA・PB＝PC・PD　　　PA・PB＝PT²

4　方べきの定理の逆（定理１１の逆）

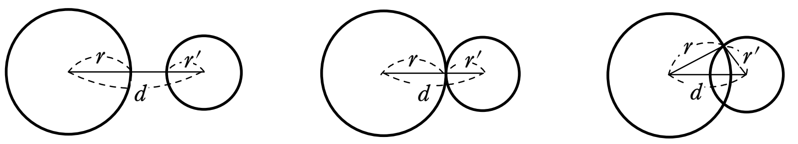
２つの線分 AB と CD，または AB の延長と CD の延長が点 P で交わるとき，PA・PB＝PC・PD が成り立つならば，４点 A，B，C，D は１つの円周上にある。

６　２つの円

1　２つの円の位置関係

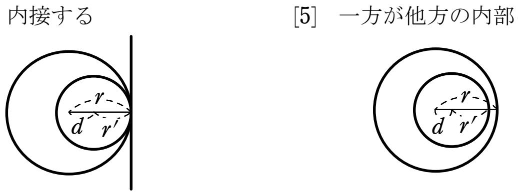
２つの円の位置関係には，次のような場合がある。（ただし，$r>r'$）

[1]　一方が他方の外部にある　　[2]　外接する　　[3]　２点で交わる



$d>r+r'$　　　$d=r+r'$　　　$r-r'<d<r+r'$

[4]　内接する　　[5]　一方が他方の内部にある

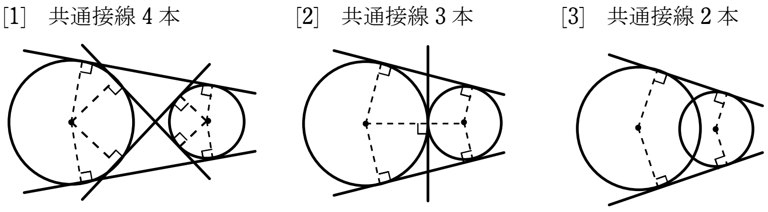


$d=r-r'$　　　$d<r-r'$

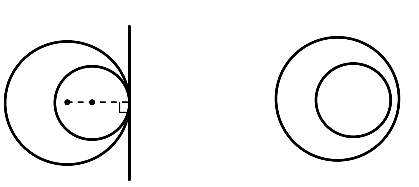
２つの円の両方に接する直線を，２つの円の **共通接線** という。

２つの円の共通接線には，次のような場合がある。

[1]　共通接線４本　　[2]　共通接線３本　　[3]　共通接線２本



[4]　共通接線１本　　[5]　共通接線はない



７　作図

1　作図の意味

作図では，定規とコンパスを用いて

[1]　与えられた２点を通る直線を引くこと

[2]　与えられた１点を中心として，与えられた半径の円をかくこと

だけができる。それらの直線や円などの交点を求めて，次々と点，直線，円をかき，条件を満たす図形をかくことが作図である。

注　２枚の三角定規をすべらせて平行線を引いたり，定規の目もりで長さを測ったりすることは，上の意味の作図ではない。

第２節　空間図形

８　直線と平面

1　２直線の位置関係

1　異なる２直線 ℓ，m の位置関係には，次の３つの場合がある。

[1]　１点で交わる
[2]　平行である（$\ell \mathbin{/\!/} m$）
……２直線は１つの平面上にある。

[3]　ねじれの位置にある　……２直線は１つの平面上にない。

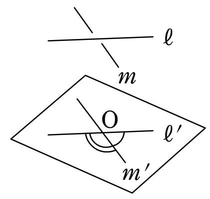
2　３直線 ℓ，m，n について

$\ell \mathbin{/\!/} m$，$m \mathbin{/\!/} n$ ならば $\ell \mathbin{/\!/} n$

3　２直線 ℓ，m が平行でないとき，任意の１点 O を通り，ℓ，m に平行な直線を，それぞれ ℓ'，m' とすると，ℓ' と m' のなす角を **２直線 ℓ，m のなす角** という。

２直線 ℓ，m のなす角が直角のとき，ℓ と m は **垂直** であるといい，$\ell \perp m$ と書く。

また，**平行な２直線の一方に垂直な直線は，他方にも垂直である。**



2　直線と平面の位置関係

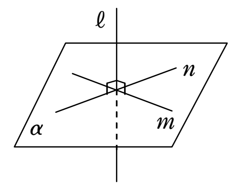
1　直線 ℓ と平面 α の位置関係には，次の３つの場合がある。

[1]　ℓ は α に含まれる
[2]　１点で交わる
……ℓ と α は共有点をもつ。

[3]　平行である（$\ell \mathbin{/\!/} \alpha$）……　ℓ と α は共有点をもたない。

2　直線 ℓ が，平面 α 上のすべての直線に垂直であるとき，ℓ は α に **垂直** である，または ℓ は α に **直交** するといい，$\ell \perp \alpha$ と書く。このとき，ℓ を平面 α の **垂線** という。

また，**直線 ℓ が，平面 α 上の交わる２直線 m，n に垂直ならば，直線 ℓ は平面 α に垂直である。**

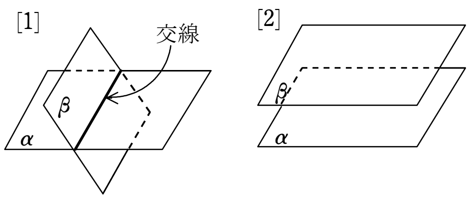


3　２平面の位置関係

1　異なる２平面 α，β の位置関係には，次の２つの場合がある。

[1]　交わる

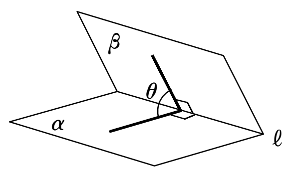
[2]　平行である（$\alpha \mathbin{/\!/} \beta$）



2　交わる２平面の交線上の点から，各平面上に，交線に垂直に引いた２直線のなす角を **２平面のなす角** という。

２平面 α，β のなす角が直角のとき，α，β は **垂直** である，または **直交** するといい，$\alpha \perp \beta$ と書く。

また，**平面 α に垂直な直線を含む平面は，α に垂直である。**



研究　三垂線の定理

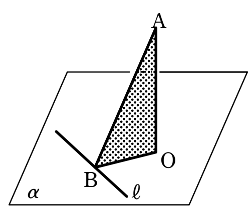
1　三垂線の定理

平面 α とその上の直線 ℓ がある。このとき，α 上にない点 A，α 上にあるが ℓ 上にない点 O，および ℓ 上の点 B について，次の **三垂線の定理** が成り立つ。

1　$\mathrm{OA} \perp \alpha$，$\mathrm{OB} \perp \ell$　ならば　$\mathrm{AB} \perp \ell$

2　$\mathrm{OA} \perp \alpha$，$\mathrm{AB} \perp \ell$　ならば　$\mathrm{OB} \perp \ell$

3　$\mathrm{OB} \perp \ell$，$\mathrm{AB} \perp \ell$，$\mathrm{OA} \perp \mathrm{OB}$　ならば　$\mathrm{OA} \perp \alpha$



９　空間図形と多面体

1　多面体

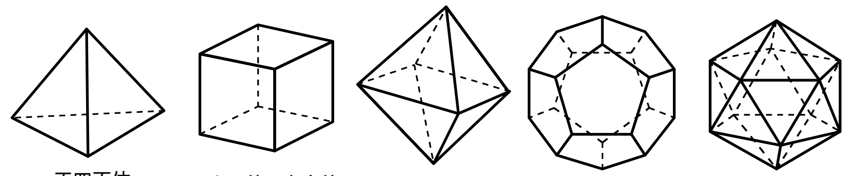
1　三角柱，四角錐などのように，平面だけで囲まれた立体を **多面体** といい，へこみのない多面体を **凸多面体** という。

次の [1]，[2] を満たす凸多面体を **正多面体** という。

[1]　各面はすべて合同な正多角形である。

[2]　各頂点に集まる面の数はすべて等しい。

正多面体は，次の５種類しかないことが知られている。



正四面体　**正六面体（立方体）**　**正八面体**　**正十二面体**　**正二十面体**

2　凸多面体の頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とすると $v-e+f=2$ が成り立つ。これを **オイラーの多面体定理** という。

2　**正多面体から切り取った立体**

正四面体，正八面体は，次のようにして立方体の内部に作ることができる。

1　正四面体……立方体の各辺の隣り合わない頂点を結ぶ。

2　正八面体……立方体の各面の対角線の交点を頂点とし，隣り合った面どうしの頂点を結ぶ。