第６章　微分法と積分法

第１節　微分係数と導関数

１　微分係数

1 極限値

一般に，関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら，a に限りなく近づくとき，$f(x)$ の値が一定の値 α に限りなく近づくならば，α を x が a に限りなく近づくときの関数 $f(x)$ の **極限値** という。このことを，次のように書く。

$$\lim_{x\to a} f(x)=\alpha \quad \text{または} \quad x \longrightarrow a \text{ のとき } f(x) \longrightarrow \alpha$$

2 平均変化率と微分係数

関数 $y=f(x)$ において

$x=a$ から $x=b$ までの**平均変化率**　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$x=a$ における**微分係数** (変化率)　$f'(a)=\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

3 接線の傾きと微分係数

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $\mathrm{A}\,(a,\ f(a))$ における接線の傾きは，関数 $f(x)$ の $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ に等しい。

２　導関数とその計算

1 導関数

１　**関数 $f(x)$ の導関数**

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad f'(x)=\lim_{\varDelta x\to 0}\frac{f(x+\varDelta x)-f(x)}{\varDelta x}$$

２　**関数 x^n の導関数**　$(x^n)'=nx^{n-1}$　(n は正の整数)

　定数関数 c の導関数　$(c)'=0$

2 関数の定数倍および和，差の導関数

k は定数とする。

$y=kf(x)$ を微分すると　$y'=kf'(x)$

$y=f(x)+g(x)$ を微分すると　$y'=f'(x)+g'(x)$

$y=f(x)-g(x)$ を微分すると　$y'=f'(x)-g'(x)$

３　接線の方程式

1 接線の方程式

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(a,\ f(a))$ における接線の方程式は

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

第２節　関数の値の変化

４　関数の増減と極大・極小

1 関数の増減と導関数の符号

関数 $f(x)$ の増減は，次のようになる。

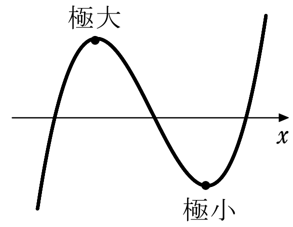
ある区間で

常に $f'(x)>0$ ならば，$f(x)$ はその区間で **増加** する。

常に $f'(x)<0$ ならば，$f(x)$ はその区間で **減少** する。

常に $f'(x)=0$ ならば，$f(x)$ はその区間で **定数** である。

2 関数の極大・極小



１　$f'(x)$ の符号が

　正から負 $\Longrightarrow$ 極大

　負から正 $\Longrightarrow$ 極小

２　$f(x)$ が $x=a$ で極値をとる

　$\Longrightarrow f'(a)=0$

３　$f'(a)=0$ であっても，$f(x)$ は $x=a$ で極値をとるとは限らない。

3 3次関数の極値

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$ とする。

１　$f(x)$ が極値をもつ条件は，$f'(x)=0$ すなわち $3ax^2+2bx+c=0$ が異なる 2 つの実数解をもつこと。

　すなわち，判別式 D について　$\dfrac{D}{4}=b^2-3ac>0$

２　極値をもつときは極大値，極小値を 1 つずつもち

　(極大値)$>$(極小値)

　3 次の項の係数 a について，

　$a>0$ ならば　(極大値をとる x の値)$<$(極小値をとる x の値)

　$a<0$ ならば　(極大値をとる x の値)$>$(極小値をとる x の値)

５　関数の増減・グラフの応用

1 関数の最大・最小

$a\leqq x\leqq b$ における $f(x)$ の最大・最小は，$f(x)$ の極値と定義域の端における関数の値 $f(a)$，$f(b)$ との大小を調べて決定する。その際，増減表を利用する。

注　１　極大値，極小値は必ずしも最大値，最小値ではない。

　２　定義域が $a<x<b$ や $x\geqq a$ などの場合には，最大値，最小値がないこともある。

2 文章題 (最大・最小) の解法の手順

[1]　変数を適当に選び，求める量の関数を作る。

[2]　定義域に注意して，その関数の最大値・最小値を調べる。

3 方程式への応用

１　**$f(x)=0$ の実数解**　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標

２　**$f(x)=g(x)$ の実数解**　2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の共有点の x 座標

4 不等式への応用

不等式 $f(x)>g(x)$ を証明するには，関数 $F(x)=f(x)-g(x)$ の値の変化を調べる。

１　$F(x)$ の最小値>0 を示す。

２　$x>a$ で $F'(x)>0$ かつ $F(a)>0$ ならば，$x>a$ で $F(x)>0$

第３節　積分法

６　不定積分

1　導関数と不定積分

１　$f(x)$ の不定積分

$F'(x)=f(x)$ のとき　$\int f(x)dx=F(x)+C$　（C は積分定数）

２　x^n の不定積分　n は 0 以上の整数とする。

$$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C \quad (C \text{ は積分定数})$$

参考　$\int (ax+b)^n dx=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C$

2　関数の定数倍および和，差の不定積分

$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ のとき，C を積分定数とすると

定数倍　$\int kf(x)dx=kF(x)+C$　k は定数

和　$\int \{f(x)+g(x)\}dx=F(x)+G(x)+C$

差　$\int \{f(x)-g(x)\}dx=F(x)-G(x)+C$

７　定積分

1　定積分とその計算　$F'(x)=f(x)$ のとき　$\int_a^b f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

定数倍　$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$　k は定数

和　$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

差　$\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

定積分の性質

１　$\int_a^a f(x)dx=0$　　２　$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$

３　$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

2　偶関数・奇関数の定積分　n は 0 以上の整数とする。

１　$\int_{-a}^a x^{2n}dx=2\int_0^a x^{2n}dx$　　２　$\int_{-a}^a x^{2n-1}dx=0$

3　$(x-\alpha)(x-\beta)$ の定積分

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

4　定積分と微分法

a を定数とするとき，x の関数 $\int_a^x f(t)dt$ の導関数は $f(x)$ である。

すなわち　$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$

８　定積分と面積

1　定積分と面積

１　区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は　$S=\int_a^b f(x)dx$

２　区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \leqq 0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は　$S=\int_a^b \{-f(x)\}dx$

３　区間 $a \leqq x \leqq b$ で $f(x) \geqq g(x)$ のとき，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフおよび 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた部分の面積 S は　$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$

参考　次の公式を利用すると，積分の計算がらくになることがある。

①　放物線に関する面積には

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

②　放物線と接線に関する面積には

$$\int (x+p)^2 dx=\frac{1}{3}(x+p)^3+C \quad (C \text{ は積分定数})$$