

第1章 式と証明
第1節 式と計算

1 3次式の展開と因数分解

[1] 3次式の展開の公式

- 1 $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- 2 $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

[2] 3次式の因数分解の公式

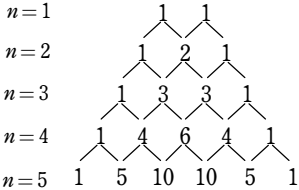
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

[参考] $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$

2 二項定理

[1] パスカルの三角形

- 1 数の配列は左右対称で、各行の両端の数は1である。
- 2 2行目以降の両端以外の数は、左上と右上の数の和に等しい。



$a+b$
 $(a+b)^2$
 $(a+b)^3$
 $(a+b)^4$
 $(a+b)^5$

[2] 二項定理

$(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2$
 $+\cdots+{}_nC_ra^{n-r}b^r+\cdots+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+{}_nC_nb^n$

[3] $(a+b+c)^n$ の展開式 [研究]

$(a+b+c)^n$ の展開式の一般項は
 $\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$ ただし $p+q+r=n$

3 整式の割り算

[1] 整式の割り算

- 1 整式 A を整式 B で割った商を Q 、余りを R とすると
 $A=BQ+R$ (ただし、 R は0か、 B より次数の低い整式)
- 2 整式 A を整式 B で割った商と余りを求める計算では、 A 、 B を降べきの順に整理してから行う。

4 分数式とその計算

[1] 分数式

2つの整式 A 、 B によって $\frac{A}{B}$ の形に表され、 B に文字を含む式を、**分数式** という。

[2] 分数式の計算

- 1 $\frac{A}{B}=\frac{A\times C}{B\times C}$, $\frac{A}{B}=\frac{A\div D}{B\div D}$ ($C\neq 0$, $D\neq 0$)
- 2 $\frac{A}{B}\times\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$, $\frac{A}{B}\div\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\times\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC}$
- 3 $\frac{A}{C}+\frac{B}{C}=\frac{A+B}{C}$, $\frac{A}{C}-\frac{B}{C}=\frac{A-B}{C}$

[3] 部分分数に分解 $a\neq b$ のとき

$\frac{1}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+b}\right)$

5 恒等式

[1] 恒等式の性質

恒等式の両辺が x についての整式のとき、各辺で同類項を整理すると、次のことが成り立つ。

両辺の同じ次数の項の係数は、それぞれ等しい。

たとえば、 a 、 b 、 c 、 a' 、 b' 、 c' を定数とすると、次のことが成り立つ。

- 1 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式である
 $\iff a=a'$, $b=b'$, $c=c'$
- 2 $ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式である
 $\iff a=b=c=0$

[2] 恒等式の係数決定

- ① 係数比較法 両辺の同じ次数の項の係数を比較する。
- ② 数値代入法 適当な値を代入して、連立方程式を作り、それを解く。
(逆の確認が必要)

第2節 等式・不等式の証明

6 等式の証明

[1] 恒等式の証明

恒等式 $A=B$ の証明方法

- 1 A か B の一方を変形して、他方を導く。
- 2 A と B の両方を変形して、同じ式を導く。
- 3 $A-B$ を変形して、0 になることを示す。

[2] 条件付きの等式の証明

- ① 条件式を用いて文字を消去し、[1] で示した恒等式の証明方法で行う。
- ② 条件式が $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ($\iff a:b=c:d$, $a:c=b:d$) のような比の値を用いた式 (比例式) のときは、(比の値)= k とおく。

7 不等式の証明

[注] 以下では、とくに断らない限り、文字は実数を表すものとする。

[1] 実数の大小関係

- 0 2つの実数 a 、 b については、 $a>b$ 、 $a=b$ 、 $a<b$ のうち、どれか1つの関係だけが成り立つ。
- 1 $a>b$, $b>c \implies a>c$
- 2 $a>b \implies a+c>b+c$, $a-c>b-c$
- 3 $a>b$, $c>0 \implies ac>bc$, $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$
- 4 $a>b$, $c<0 \implies ac<bc$, $\frac{a}{c}<\frac{b}{c}$
- 5 $a>b \iff a-b>0$
- 6 $a<b \iff a-b<0$

[2] 不等式の証明

不等式を証明するには、上記の大小関係、および以下の性質を利用する。

実数の平方 $a^2\geq 0$ (等号は $a=0$ のとき成り立つ)
 $a^2+b^2\geq 0$ (等号は $a=b=0$ のとき成り立つ)

平方の大小 $a>0$, $b>0$ のとき $a^2>b^2 \iff a>b$, $a^2\geq b^2 \iff a\geq b$

絶対値 $|a|\geq 0$, $|a|\geq a$, $|a|\geq -a$, $|a|^2=a^2$, $|ab|=|a||b|$

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$, $b>0$ のとき $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ (等号は $a=b$ のとき成り立つ)