第５章　指数関数と対数関数

第１節　指数関数

１　指数の拡張

[1]　累乗根の性質

$a>0$，$b>0$ で，m，n，p は正の整数とする。

１　$\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　２　$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　　３　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

４　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　　５　$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

参考　負の数の n 乗根

n が正の奇数のとき，実数としては１つ存在する。n が正の偶数のとき，実数の範囲では存在しない。　例　$\sqrt[3]{-27}=\sqrt[3]{(-3)^3}=-3$，$\sqrt[5]{-3}=-\sqrt[5]{3}$

[2]　有理数の指数

$a>0$ で，m，n が正の整数，r が正の有理数のとき

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}\quad とくに\quad a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

$$a^{-r}=\frac{1}{a^r},\quad a^0=1$$

[3]　指数法則

$a>0$，$b>0$ で，r，s は有理数とする。

１　$a^r a^s=a^{r+s}$　　２　$\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$　　３　$(a^r)^s=a^{rs}$　　４　$(ab)^r=a^r b^r$

２　指数関数

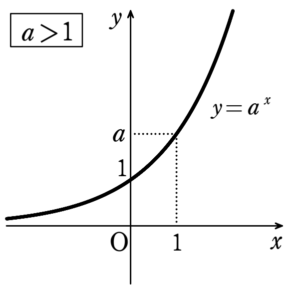
[1]　指数関数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）のグラフとその特徴

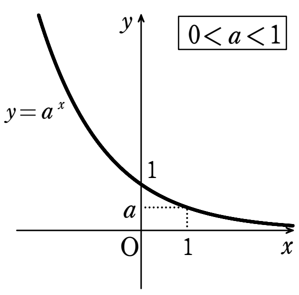
１　定義域は実数全体，値域は正の数全体

２　$a>1$ のとき増加関数　　$r<s \iff a^r<a^s$

　　$0<a<1$ のとき減少関数　　$r<s \iff a^r>a^s$

３　グラフは点 $(0,\ 1)$，$(1,\ a)$ を通り，x 軸が漸近線





第２節　対数関数

３　対数とその性質

[1]　対数　$a>0$，$a\neq1$ で $M>0$ とするとき，次のことが成り立つ。

$$M=a^p \iff \log_a M=p$$

とくに　$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$

[2]　対数の性質

$a>0$，$a\neq1$，$M>0$，$N>0$ で，k は実数とする。

１　$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

２　$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$　　とくに　$\log_a \dfrac{1}{N}=-\log_a N$

３　$\log_a M^k=k\log_a M$

[3]　底の変換公式

a，b，c は正の数で，$a\neq1$，$b\neq1$，$c\neq1$ とするとき

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\qquad とくに\quad \log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

４　対数関数

[1]　対数関数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）のグラフとその特徴

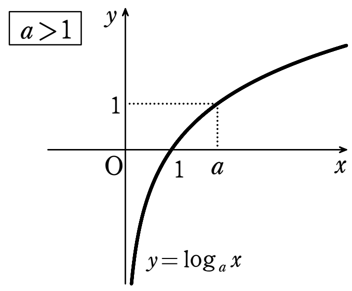
１　定義域は正の数全体，値域は実数全体

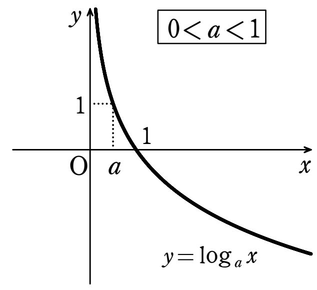
２　$a>1$ のとき増加関数　　$0<p<q \iff \log_a p<\log_a q$

　　$0<a<1$ のとき減少関数　　$0<p<q \iff \log_a p>\log_a q$

３　グラフは点 $(1,\ 0)$，$(a,\ 1)$ を通り，y 軸が漸近線

４　直線 $y=x$ に関して，$y=a^x$ のグラフと対称





５　常用対数

[1]　常用対数

10 を底とする対数を **常用対数** という。

$M=a\times10^n$（n は整数，$1\leqq a<10$）とすると　　$\log_{10}M=\log_{10}a+n$

[2]　常用対数の応用

１　自然数 N，k について

N が k 桁の数 $\iff 10^{k-1}\leqq N<10^k$

$\iff k-1\leqq\log_{10}N<k$

２　$0<M<1$ である小数 M と自然数 k について

M の小数第 k 位に初めて 0 でない数が現れる

$\iff 10^{-k}\leqq M<10^{-k+1}$

$\iff -k\leqq\log_{10}M<-k+1$