第２章　複素数と方程式

第１節　複素数と２次方程式の解

１　複素数とその計算

1 複素数

2乗すると -1 になる数を文字 i で表す。この i を **虚数単位** という。

$a+bi$ (a，b は実数，$i^2=-1$) の形に表される数を **複素数** という。

複素数 $a+bi$ では，a を **実部**，b を **虚部** という。

複素数の相等　　a，b，c，d は実数とすると

$a+bi=c+di \iff a=c$ かつ $b=d$

とくに　　$a+bi=0 \iff a=0$ かつ $b=0$

注　以下，$a+bi$ や $c+di$ などでは，文字 a，b，c，d は実数を表す。

2 複素数の計算

1　加法　$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

減法　$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

乗法　$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

除法　$\dfrac{c+di}{a+bi}=\dfrac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\dfrac{ac+bd}{a^2+b^2}+\dfrac{ad-bc}{a^2+b^2}i$

2　共役な複素数　2つの複素数 $a+bi$，$a-bi$ を，互いに **共役な複素数** という。

3 負の数の平方根　$a>0$ とする。

1　$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$　　とくに　$\sqrt{-1}=i$

2　$-a$ の平方根は　$\pm\sqrt{-a}$　すなわち　$\pm\sqrt{a}\,i$

２　2次方程式の解

1 2次方程式の解の公式

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解は　　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ の解は　　$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

2 2次方程式の解の種類の判別

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ において，$D=b^2-4ac$ を **判別式** といい，解について次のことが成り立つ。

$D>0 \iff$ 異なる2つの実数解をもつ

$D=0 \iff$ 重解をもつ

$D<0 \iff$ 異なる2つの虚数解をもつ

重解をもつとき，その重解は　$x=-\dfrac{b}{2a}$

2次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ では，D の代わりに $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい。

注　判別式により解を判別できるのは，係数が実数のときに限る。

３　解と係数の関係

1 解と係数の関係

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α，β とすると

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，　$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

2 2次式の因数分解

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の2つの解を α，β とすると

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

3 2数を解とする2次方程式

2数 α，β を解とする2次方程式の1つは　　$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$

4 2次方程式の解と k の大小

2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の異なる2つの解を α，β とし，判別式を D とする。

①　解がともに k より大

$\iff D>0$，$(\alpha-k)+(\beta-k)>0$，$(\alpha-k)(\beta-k)>0$

②　解がともに k より小

$\iff D>0$，$(\alpha-k)+(\beta-k)<0$，$(\alpha-k)(\beta-k)>0$

③　2つの解の間に $k \iff (\alpha-k)(\beta-k)<0$

第２節　高次方程式

４　剰余の定理と因数定理

1 剰余の定理

1　整式 $P(x)$ を1次式 $x-k$ で割ったときの余りは　$P(k)$

2　整式 $P(x)$ を1次式 $ax+b$ で割ったときの余りは　$P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$

2 因数定理

$x-k$ が整式 $P(k)$ の因数である $\iff P(k)=0$

参考　整式 $P(x)$ の最高次の項の係数を a，定数項を c とすると，$P(k)=0$ となる k の候補は $\pm\dfrac{|c|\text{ の正の約数}}{|a|\text{ の正の約数}}$ である。

５　高次方程式

1 高次方程式の解き方

因数分解により，1次方程式，2次方程式に帰着させる。

高次式を因数分解するには，公式・おき換え・因数定理を利用する。

2 高次方程式の性質

①　n 次方程式は，ちょうど n 個の解をもつ。

②　実数係数の高次方程式が虚数解 $a+bi$ を解にもつならば，共役な複素数 $a-bi$ も解にもつ。

3 1の3乗根

1の3乗根のうち，虚数であるものの1つを ω とする。

1の3乗根は　1，ω，ω^2　　　また　$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$

4 3次方程式の解と係数の関係

3次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の3つの解を α，β，γ とすると

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$