第３章　図形と方程式

第１節　点と直線

１　直線上の点

1　数直線上の点

数直線上の２点 A(a)，B(b) 間の距離 AB は　　$\mathrm{AB}=|b-a|$

2　内分と外分

２点 A(a)，B(b) を結ぶ線分 AB を，$m:n$ に内分する点を P，外分する点を Q とする。

内分点 P の座標は　$\dfrac{na+mb}{m+n}$，　外分点 Q の座標は　$\dfrac{-na+mb}{m-n}$

２　平面上の点

1　２点間の距離

２点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ 間の距離 AB は　　$\mathrm{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

とくに，原点 O と点 A$(x_1,\ y_1)$ の距離 OA は　　$\mathrm{OA}=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2}$

2　内分点・外分点の座標，三角形の重心の座標

１　２点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分 AB を，$m:n$ に内分する点 P，外分する点 Q の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \frac{ny_1+my_2}{m+n}\right)\qquad \mathrm{Q}\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

とくに，線分 AB の中点の座標は　$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

２　３点 A$(x_1,\ y_1)$，B$(x_2,\ y_2)$，C$(x_3,\ y_3)$ を頂点とする △ABC の重心の座標は

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

３　直線の方程式　　４　２直線の関係

1　直線の方程式のいろいろな形

１　点 $(x_1,\ y_1)$ を通り，傾きが m の直線の方程式　$y-y_1=m(x-x_1)$

２　異なる２点 $(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式

[1]　$x_1 \fallingdotseq x_2$ のとき　$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$　　[2]　$x_1=x_2$ のとき　$x=x_1$

３　x 切片が a，y 切片が b である直線の方程式

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\quad（ただし，a \fallingdotseq 0,\ b \fallingdotseq 0）$$

2　２直線の平行，垂直

１　２直線 $y=m_1x+k_1$，$y=m_2x+k_2$ について

平行条件　$m_1=m_2$　　　　垂直条件　$m_1m_2=-1$

２　２直線 $a_1x+b_1y+c_1=0$，$a_2x+b_2y+c_2=0$ $(b_1b_2 \fallingdotseq 0)$ について

平行条件　$a_1b_2-a_2b_1=0$　　垂直条件　$a_1a_2+b_1b_2=0$

3　点と直線の距離

点 $(x_1,\ y_1)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離 d は　　$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

参考　三角形の面積

３点 $(0,\ 0)$，$(x_1,\ y_1)$，$(x_2,\ y_2)$ を頂点とする三角形の面積 S は　　$S=\dfrac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

第２節　円

５　円の方程式

1　円の方程式

１　点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式　$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

２　原点を中心とする半径 r の円の方程式　　$x^2+y^2=r^2$

2　$x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形

円の方程式の一般形　$x^2+y^2+lx+my+n=0$　（ただし，$l^2+m^2-4n>0$）

注　$l^2+m^2-4n=0$ ならば１点を表し，$l^2+m^2-4n<0$ ならば表す図形はない。

６　円と直線

1　円と直線の位置関係

円の方程式と直線の方程式から y を消去して x の２次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が得られるとき，その判別式を $D=b^2-4ac$ とする。また，円の中心と直線の距離を d，円の半径を r とする。このとき，円と直線について，次のことが成り立つ。

[1]　異なる２点で交わる $\iff D>0 \iff d<r$

[2]　１点で接する　　$\iff D=0 \iff d=r$

[3]　共有点をもたない $\iff D<0 \iff d>r$

2　円の接線

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は　$x_1x+y_1y=r^2$

参考　円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は

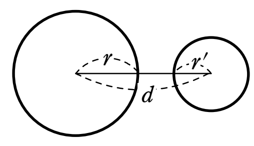
$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

７　２つの円

1　２つの円の位置関係

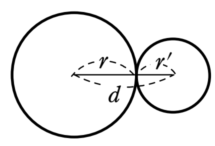
２つの円の位置関係には，次のような場合がある。（ただし，$r>r'$）

[1]　互いに外部にある



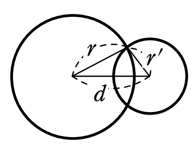
$d>r+r'$

[2]　外接する



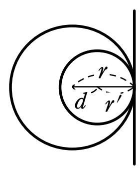
$d=r+r'$

[3]　２点で交わる



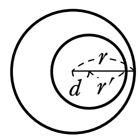
$r-r'<d<r+r'$

[4]　内接する



$d=r-r'$

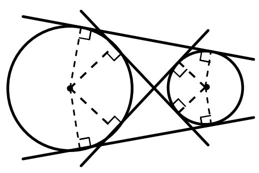
[5]　一方が他方の内部にある



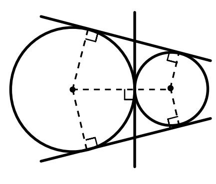
$d<r-r'$

２つの円の両方に接する直線を，２つの円の **共通接線** という。
２つの円の共通接線には，次のような場合がある。

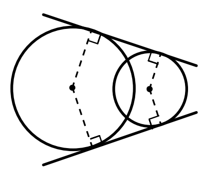
[1]　共通接線４本



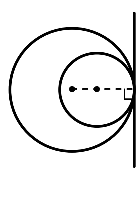
[2]　共通接線３本



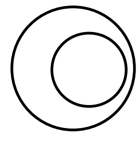
[3]　共通接線２本



[4]　共通接線１本



[5]　共通接線はない



2　２つの円の交点を通る図形

２つの円 $x^2+y^2+lx+my+n=0$，$x^2+y^2+l'x+m'y+n'=0$ が２点で交わるとき，方程式

$$k(x^2+y^2+lx+my+n)+(x^2+y^2+l'x+m'y+n')=0\quad（k は定数）$$

は，$k \fallingdotseq -1$ のとき２つの円の交点を通る円
　　$k=-1$ のとき２つの円の交点を通る直線　を表す。

第３節　軌跡と領域

８　軌跡と方程式

1　座標平面上の点の軌跡

座標を用いて点の軌跡を求める手順

１　条件を満たす点Ｐの座標を $(x,\ y)$ として，Ｐに関する条件を x，y の式で表し，この方程式の表す図形が何かを調べる。

２　逆に，１で求めた図形上のすべての点Ｐが，与えられた条件を満たすことを確かめる。

注意　２が明らかな場合は，これを省略することがある。

９　不等式の表す領域

1　直線と領域　直線 $y=mx+k$ を ℓ とする。

１　不等式 $y>mx+k$ の表す領域は，直線 ℓ の上側の部分

２　不等式 $y<mx+k$ の表す領域は，直線 ℓ の下側の部分

2　曲線と領域　曲線 $y=f(x)$ を F とする。

１　不等式 $y>f(x)$ の表す領域は，曲線 F の上側の部分

２　不等式 $y<f(x)$ の表す領域は，曲線 F の下側の部分

3　円と領域

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を C とする。

１　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域は，円 C の内部

２　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域は，円 C の外部

4　領域を利用した命題の証明

２つの条件 p，q が x，y の不等式で表されるとき，p，q が表す領域を，それぞれ P，Q とする。

命題 $p \Longrightarrow q$ が真であることを示すには，$P \subset Q$ を示せばよい。