

第4章 図形と計量

1.8 三角比

① 正弦・余弦・正接

右の図の直角三角形において

1  $\sin \theta = \frac{y}{r}$  (正弦),  $\cos \theta = \frac{x}{r}$  (余弦),

$\tan \theta = \frac{y}{x}$  (正接)

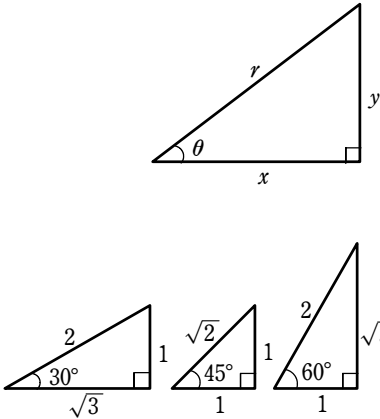
2  $y = r \sin \theta$ ,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = x \tan \theta$

② 30°, 45°, 60°の三角比

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\tan 45^\circ = 1$

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$



1.9 三角比の相互関係

① 三角比の相互関係 (θは鋭角)

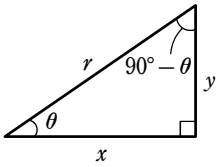
1  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$     2  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$     3  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

② 90°-θの三角比 (θは鋭角)

$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$ ,

$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ ,

$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$



2.0 三角比の拡張

① 座標を用いた三角比の定義 (0° ≤ θ ≤ 180°)

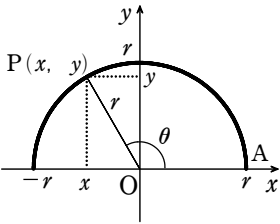
右の図で、∠AOP=θ, OP=r, P(x, y)とすると

$\sin \theta = \frac{y}{r}$ ,  $\cos \theta = \frac{x}{r}$ ,  $\tan \theta = \frac{y}{x}$

② θ=90°のときはx=0であるから,

$\tan \theta \left( = \frac{y}{x} \right)$ は定義されない。したがって,

tan θ と書いたときにはθ≠90°であるとする。

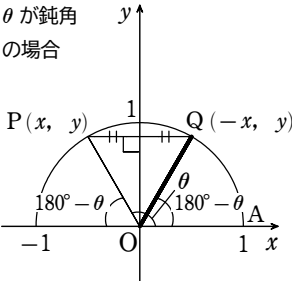
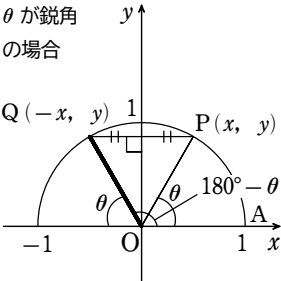


② 三角比の符号とそのとる値の範囲 (0° ≤ θ ≤ 180°)

θ	0°	鋭角	90°	鈍角	180°	とる値の範囲
sin θ	0	+	1	+	0	0 ≤ sin θ ≤ 1
cos θ	1	+	0	-	-1	-1 ≤ cos θ ≤ 1
tan θ	0	+		-	0	実数全体

③ 180°-θの三角比 (0° ≤ θ ≤ 180°)

$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$ ,  $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$ ,  $\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$



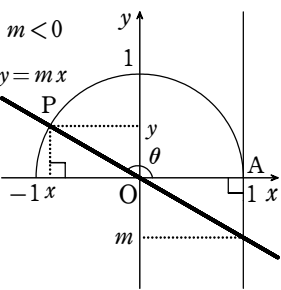
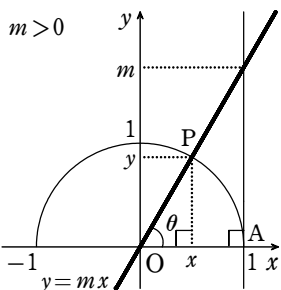
④ 三角比の相互関係 (0° ≤ θ ≤ 180°)

1  $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$     2  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$     3  $1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$

⑤ 直線の傾きと正接

直線  $y = mx$  と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると  $m = \tan \theta$

② m=0 のときは、θ=0° とすると、この場合も  $m = \tan \theta$  が成り立つ。



2.1 正弦定理・余弦定理

① 正弦定理

△ABC の外接円の半径を R とすると

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

②  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$  を比の形で書くと,

$a : \sin A = b : \sin B = c : \sin C$

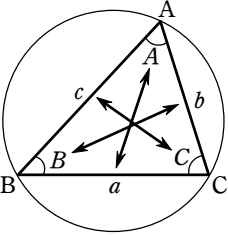
となる。

この比の関係を,

$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$

と書くこともある。

なお、 $a = 2R \sin A$ ,  $b = 2R \sin B$ ,  $c = 2R \sin C$  が成り立つ。



② 余弦定理

△ABC において、次が成り立つ。

1  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ ,

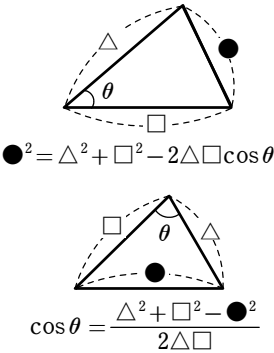
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$ ,

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

2  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ,

$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ ,

$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$



③ 三角形の角と辺の関係

△ABC において、次が成り立つ。

$b^2 + c^2 > a^2 \iff \cos A > 0 \iff A$  は鋭角

$b^2 + c^2 = a^2 \iff \cos A = 0 \iff A$  は直角

$b^2 + c^2 < a^2 \iff \cos A < 0 \iff A$  は鈍角

2.2 正弦定理と余弦定理の応用

① 三角形の辺と角の決定

三角形の 6 つの要素 (3 辺, 3 つの角) のうち、少なくとも 1 つの辺を含む 3 つの要素が与えられたとき、残りの要素を求めることができる。

1 3 辺 (a, b, c) から

余弦定理で角 (A, B, C)    なお  $C = 180^\circ - (A + B)$

2 2 辺と 1 つの角 (a, b, C) から

余弦定理で辺 (c), さらに余弦定理で角 (A, B)

3 1 辺と 2 つの角 (a, B, C) から

$A = 180^\circ - (B + C)$ , 正弦定理で辺 (b, c)

なお、最後の辺は余弦定理で求めてもよい。

② 三角形の辺と角の大小関係

三角形の 2 辺の大小関係は、その向かい合う角の大小関係と一致する。

△ABC において、たとえば  $b < c \iff B < C$

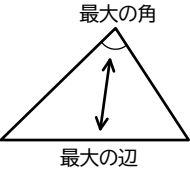
このことから、最大の辺に向かい合う角が最大の角である

ことがいえる。

(最小の辺に向かい合う角が、最小の角であることもいえる。)

③ 最大でない角は鋭角である。

たとえば、 $B < C$  ならば、B は鋭角である。



④ 文字を含む分数の計算

正弦定理や余弦定理を利用して解く問題では、文字を含む分数の計算が必要になる場合がある。文字を含む分数の計算は、次のことを利用して行う。

基本性質  $\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}$ ,  $\frac{A/D}{B/D} = \frac{A}{B}$  (ただし、 $C \neq 0$ ,  $D \neq 0$ )

乗法・除法  $\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$ ,  $\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$

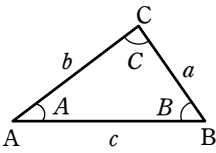
加法・減法  $\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$ ,  $\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$

2 3 三角形の面積

① 三角形の面積

△ABC の面積  $S$  は、次の式で表される。

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A,\; S=\frac{1}{2}ca\sin B,\; S=\frac{1}{2}ab\sin C$$



② 多角形の面積

多角形の面積は、多角形をいくつかの三角形に分割することで、求めることができる。

③ 三角形の内接円と面積

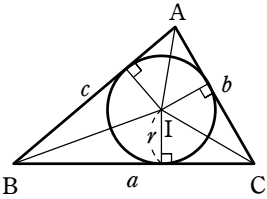
△ABC の面積を  $S$ ，内接円の半径を  $r$  とすると

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

【参考】 内接円の中心を  $I$  とすると

$$S=\triangle IBC+\triangle ICA+\triangle IAB$$

$$=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$



発展 ヘロンの公式

① ヘロンの公式

3 辺の長さが  $a$ ， $b$ ， $c$  である △ABC の面積  $S$  は

$$2s=a+b+c \text{ とすると } S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

2 4 空間図形への応用

① 空間図形への応用

- 1 線分の長さや角の大きさは、三角形の辺や角ととらえて、三平方の定理や正弦定理，余弦定理を利用する。
- 2 角錐・円錐の体積

底面積  $S$ ，高さ  $h$  の角錐・円錐の体積  $V$  は  $V=\frac{1}{3}Sh$