

第3章 2次関数

1.1 関数とグラフ

① 関数

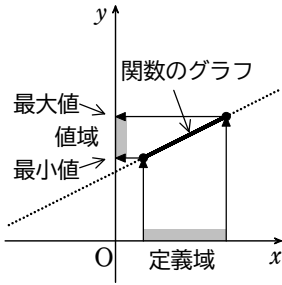
- 1 2つの変数  $x, y$  について、 $x$  の値を定めるとそれに対応して  $y$  の値がただ1つ定まるとき、 $y$  は  $x$  の 関数 であるという。
- 2 1次関数、2次関数の一般形  $a, b, c$  は定数とする。  
1次関数は  $y = ax + b$  ただし、 $a \neq 0$   
2次関数は  $y = ax^2 + bx + c$  ただし、 $a \neq 0$
- 3  $y$  が  $x$  の関数であるとき、 $y$  を表す  $x$  の式を  $f(x)$  や  $g(x)$  のように書くことがある。また、 $x$  の関数  $y = f(x)$  を単に、関数  $f(x)$  ともいう。  
関数  $y = f(x)$  において、 $x$  の値  $a$  に対応して定まる  $y$  の値を  $f(a)$  と書き、 $f(a)$  を関数  $f(x)$  の  $x = a$  における 値 という。
- 4 関数  $y = f(x)$  について、変数  $x$  のとりうる値の範囲を、関数  $f(x)$  の 定義域 という。また、定義域の  $x$  の値に対応して  $y$  がとる値の範囲を、関数  $f(x)$  の 値域 という。

② 関数のグラフ

座標平面上において、関係  $y = f(x)$  を満たすような点  $(x, f(x))$  全体で作られる図形を、関数  $y = f(x)$  の グラフ という。

③ 関数の最大値・最小値

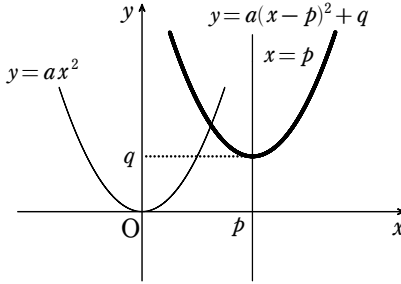
関数の値域に最大の値があるとき、その値を関数の 最大値 という。  
また、関数の値域に最小の値があるとき、その値を関数の 最小値 という。



1.2 2次関数のグラフ

① 2次関数  $y = ax^2$  のグラフ

2次関数  $y = ax^2$  のグラフは放物線である。  
その軸は  $y$  軸、頂点は原点である。  
 $a > 0$  のとき 下に凸、  
 $a < 0$  のとき 上に凸



② 2次関数  $y = a(x-p)^2 + q$  のグラフ

2次関数  $y = a(x-p)^2 + q$  のグラフは、 $y = ax^2$  のグラフを、 $x$  軸方向に  $p$ 、 $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動した放物線である。  
その軸は直線  $x = p$ 、頂点は点  $(p, q)$  である。

③ 2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフ

2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは、 $y = ax^2$  のグラフを平行移動した放物線である。

$y = ax^2 + bx + c$  を  $y = a(x-p)^2 + q$  の形に変形すると、 $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

であるから、放物線  $y = ax^2 + bx + c$  の軸と頂点は次のようになる。

軸は 直線  $x = -\frac{b}{2a}$ 、頂点は 点  $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$

また、2次関数  $y = ax^2 + bx + c$  のグラフは  $y$  軸と点  $(0, c)$  で交わる。

〔補足〕 2次式  $ax^2 + bx + c$  を  $a(x-p)^2 + q$  の形に変形することを、平方完成 するという。

- ①  $x^2$ 、 $x$  の項を  $x^2$  の係数  $a$  でくくる。  
②  $\quad \quad$  部分を右のように変形する。  
③  $a$  を掛けて  $\{ \}$  をはずす。  
④  $y = a(x-p)^2 + q$  の形に整理する。

〔研究〕 グラフの平行移動・対称移動

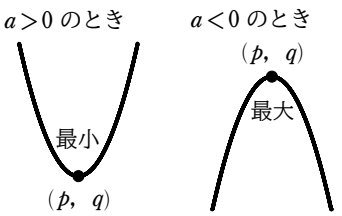
関数  $y = f(x)$  のグラフについて

- 1  $x$  軸方向に  $p$ 、 $y$  軸方向に  $q$  だけ平行移動すると、次のような関数のグラフになる。  
 $y - q = f(x - p)$  すなわち  $y = f(x - p) + q$
- 2  $x$  軸、 $y$  軸、原点に関して対称移動すると、次のような関数のグラフになる。  
 $x$  軸： $-y = f(x)$  すなわち  $y = -f(x)$   
 $y$  軸： $y = f(-x)$   
 $x$  軸： $-y = f(-x)$  すなわち  $y = -f(-x)$

1.3 2次関数の最大・最小

① 2次関数  $y = a(x-p)^2 + q$  の最大・最小

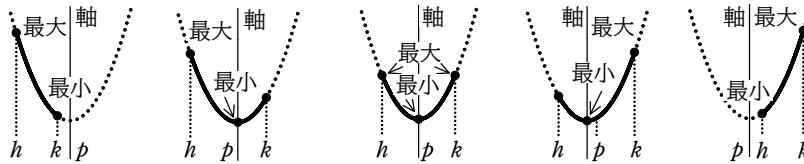
- $a > 0$  のとき  
 $x = p$  で最小値  $q$  をとる。  
最大値はない。
- $a < 0$  のとき  
 $x = p$  で最大値  $q$  をとる。  
最小値はない。



② 定義域に制限のある場合の関数の最大・最小

グラフをかいて、頂点の位置、定義域の両端における  $y$  の値に注目する。

関数  $y = a(x-p)^2 + q$  ( $h \leq x \leq k$ ) の最大・最小は、軸  $x = p$  (頂点の  $x$  座標) の位置によって、次のようになる。(下の図は  $a > 0$  の場合)



$a < 0$  の場合は、グラフが上に凸で、最大と最小が入れかわる。

③ 最大・最小の応用 (文章題)

- ① 何を変数 ( $x$ ) にするかを決め、そのとりうる値の範囲 (定義域) を定める。
  - ② 最大・最小を求めようとする量 ( $y$ ) を、変数 ( $x$ ) を用いて表す。
  - ③ 変数 ( $x$ ) の定義域に注意して、② で表した関数 ( $x$  の式  $y$ ) の最大・最小を求める。
- 〔注〕  $y \geq 0$  のとき、 $y$  の最大・最小を求めるのに、まず  $y^2$  の最大・最小を求めると簡単な場合もある。このとき、次が成り立つことを利用する。

$A \geq 0, B \geq 0$  のとき  $A < B \iff A^2 < B^2$

1.4 2次関数の決定

① 2次関数の決定

- 1 与えられた条件によって、求める2次関数を適した形において、未定の係数を定める。  
[1]  $y = a(x-p)^2 + q$  [2]  $y = ax^2 + bx + c$   
頂点や軸に関する条件が与えられた場合は [1] の形、  
グラフ上の3点が与えられた場合は [2] の形におくとよい。
- 2  $y = f(x)$  のグラフが点  $(s, t)$  を通る。  $\iff$  等式  $t = f(s)$  が成り立つ。

② 連立3元1次方程式の解き方

- ① 1文字を消去して、残り2文字の連立方程式を導く。
- ② 2文字の連立方程式を解く。
- ③ 残りの1文字の値を求める。

1.5 2次方程式

① 2次方程式の解き方

- 1 因数分解 次の性質を用いる。  
2つの実数  $A, B$  について  $AB = 0 \iff A = 0$  または  $B = 0$
- 2 平方根の考え「 $a > 0$  のとき、 $x^2 = a$  の解は  $x = \pm\sqrt{a}$ 」を利用する。
- 3 解の公式 2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  は

$b^2 - 4ac \geq 0$  のとき実数解をもち  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$b = 2b'$  ならば、 $b'^2 - ac \geq 0$  のとき実数解をもち  $x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a}$

〔注〕 一般に、2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  といえば、 $a \neq 0$  である。  
単に、方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  といえば、 $a = 0$  の場合もある。

② 方程式と解

方程式  $f(x) = 0$  の解の1つが  $\alpha \iff f(\alpha) = 0$

③ 2次方程式の係数と実数解

2次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  について、 $b^2 - 4ac$  を判別式 といい、 $D$  で表す。  
このとき、次のことが成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} D > 0 &\iff \text{異なる2つの実数解をもつ} \\ D = 0 &\iff \text{ただ1つの実数解(重解)をもつ} \\ D < 0 &\iff \text{実数解をもたない} \end{aligned} \right\} D \geq 0 \iff \text{実数解をもつ}$$


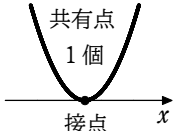
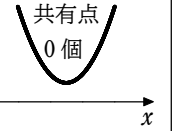
〔注〕  $b = 2b'$  のとき、 $D$  の代わりに  $\frac{D}{4} = b'^2 - ac$  の符号を調べてもよい。

1 6 2次関数のグラフとx軸の位置関係

1 2次関数のグラフとx軸の共有点

- 1 2次関数  $y=ax^2+bx+c$  のグラフと2次方程式  $ax^2+bx+c=0$  について  
(グラフとx軸の共有点のx座標) = (方程式の実数解)  
(グラフとx軸の共有点の個数) = (方程式の実数解の個数)
- 2 2次関数  $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$  のグラフは、x軸と2点  $(\alpha, 0)$ 、 $(\beta, 0)$  で交わる。
- 2 2次関数のグラフとx軸の位置関係

2次関数  $y=ax^2+bx+c$  のグラフとx軸の位置関係は、2次方程式  $ax^2+bx+c=0$  の判別式  $D=b^2-4ac$  の符号によって、次のようにまとめられる。

$D=b^2-4ac$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
x軸との位置関係	異なる2点で交わる	接する	共有点をもたない
$a>0$ のとき グラフとx軸との共有点の個数	 共有点2個	 共有点1個 接点	 共有点0個
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x=-\frac{b}{2a}$	実数解はない

発展 放物線と直線の共有点

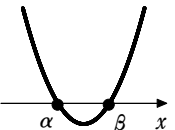
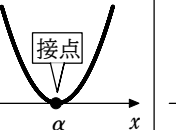
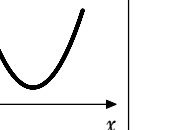
1 放物線と直線の共有点

- 1 放物線  $y=ax^2+bx+c$  と直線  $y=mx+n$  の共有点のx座標  
 $\longleftrightarrow$  2次方程式  $ax^2+bx+c=mx+n$  の実数解
- 2 1において、共有点の個数と2次方程式の実数解の個数は一致する。  
放物線と直線が異なる2点で交わる  $\longleftrightarrow$  異なる2つの実数解をもつ ( $D>0$ )  
放物線と直線が接する  $\longleftrightarrow$  重解をもつ ( $D=0$ )  
放物線と直線が共有点をもたない  $\longleftrightarrow$  実数解をもたない ( $D<0$ )

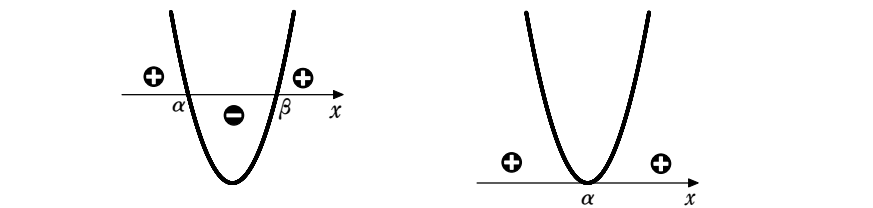
1 7 2次不等式

1 2次不等式の解

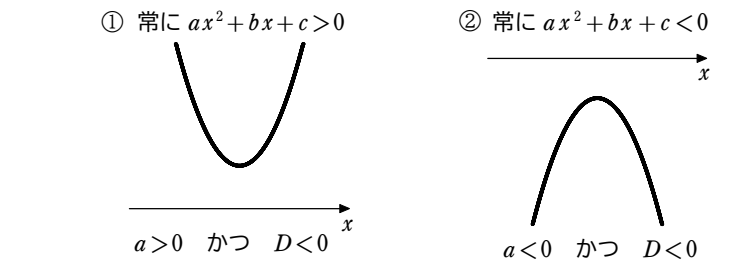
- 1  $a>0$  のとき、2次不等式  
 $ax^2+bx+c>0$ ,  $ax^2+bx+c\geq 0$ ,  $ax^2+bx+c<0$ ,  $ax^2+bx+c\leq 0$   
の解は、次の表のようにまとめられる。ただし、 $\alpha<\beta$  とする。

$D=b^2-4ac$	$D>0$	$D=0$	$D<0$
$y=ax^2+bx+c$ のグラフとx軸の位置関係			
$ax^2+bx+c=0$ の実数解	$x=\alpha, \beta$	$x=\alpha$	実数解はない
$ax^2+bx+c>0$ の解	$x<\alpha, \beta< x$	$\alpha$ 以外のすべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c\geq 0$ の解	$x\leq \alpha, \beta\leq x$	すべての実数	すべての実数
$ax^2+bx+c<0$ の解	$\alpha< x< \beta$	解はない	解はない
$ax^2+bx+c\leq 0$ の解	$\alpha\leq x\leq \beta$	$x=\alpha$	解はない

- $a<0$  のときは、不等式の両辺に  $-1$  を掛けて、 $x^2$  の係数を正にして考える。
- 2  $\alpha<\beta$  のとき、 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$  の解は  $x<\alpha, \beta< x$   
 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$  の解は  $\alpha< x< \beta$   
 $(x-\alpha)^2>0$  の解は  $\alpha$  以外のすべての実数  
 $(x-\alpha)^2<0$  の解は ない



3 2次関数  $y=ax^2+bx+c$  に対して

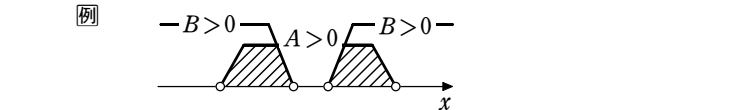
- ① 常に  $ax^2+bx+c>0 \iff a>0$  かつ  $D=b^2-4ac<0$
- ② 常に  $ax^2+bx+c<0 \iff a<0$  かつ  $D=b^2-4ac<0$
- ① 常に  $ax^2+bx+c>0$
- ② 常に  $ax^2+bx+c<0$
- 

2 連立不等式の解き方

連立不等式  $\begin{cases} A>0 \\ B>0 \end{cases}$  の解は、 $A>0$  の解と  $B>0$  の解の共通範囲である。

① 不等式をそれぞれ解く。

② それぞれの解を数直線に表し、共通範囲を求める。



補足 共通範囲がないとき、連立不等式の 解はない という。

3 2次不等式の文章題の解き方

- ① 何を文字で表すか決める。
- ② ①の文字がとりうる値の範囲を求める。
- ③ 問題の示す大小関係を不等式で表し、不等式を解く。
- ④ ②と③の共通範囲を求める。

補足 2次関数のグラフと2次方程式の解の範囲

1 放物線とx軸の共有点の存在範囲

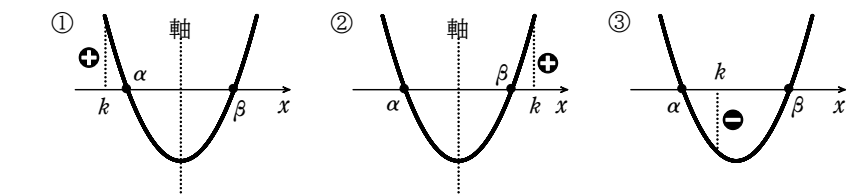
$f(x)=ax^2+bx+c$ ,  $D=b^2-4ac$  とする。  
 $a>0$  のとき、放物線  $y=f(x)$  とx軸の共有点のx座標  $\alpha, \beta (\alpha\leq\beta)$  について、次のことが成り立つ。

①  $\alpha>k, \beta>k$  (ともに  $k$  より大)  $\iff D\geq 0$ , 軸の位置  $>k$ ,  $f(k)>0$

②  $\alpha<k, \beta<k$  (ともに  $k$  より小)  $\iff D\geq 0$ , 軸の位置  $<k$ ,  $f(k)>0$

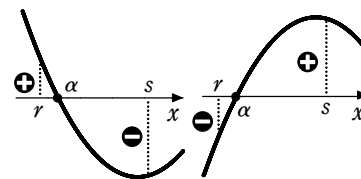
③  $\alpha<k<\beta$  ( $k$  は  $\alpha$  と  $\beta$  の間)  $\iff f(k)<0$

注  $\alpha\neq\beta$  (共有点異なる2点) のときは、①, ②で  $D>0$  となる。



2 2次方程式の解の存在範囲

2次関数  $y=f(x)$  について、 $f(r), f(s)$  の正負の符号が異なると、 $r$  と  $s$  の間に  $f(x)=0$  となる  $x$  の値  $\alpha$  が存在する。  
すなわち、 $r<s$  とすると  
 $f(r)f(s)<0 \implies$  解  $x=\alpha (r<\alpha<s)$  が存在



研究 絶対値を含む関数のグラフ

1 絶対値を含む関数のグラフ

- 1 絶対値記号  $| \cdot |$  内の式の符号によって場合を分けてグラフをかく。  
 $y=|f(x)|$  は  $\begin{cases} f(x)\geq 0 \text{ のとき} & y=f(x) \\ f(x)<0 \text{ のとき} & y=-f(x) \end{cases}$
- 2 関数  $y=|f(x)|$  のグラフは、関数  $y=f(x)$  のグラフでx軸より下側の部分をx軸に関して対称に折り返して得られる。
- 2 関数のグラフと不等式
- 1 不等式  $f(x)>mx+n$  の解は、関数  $y=f(x)$  のグラフが直線  $y=mx+n$  より上側にある  $x$  の値の範囲である。
- 2 不等式  $f(x)<mx+n$  の解は、関数  $y=f(x)$  のグラフが直線  $y=mx+n$  より下側にある  $x$  の値の範囲である。