

第2章 集合と命題

8 集合

① 集合

範囲がはっきりしたものの集まりを 集合 といい、集合を構成している1つ1つのものを、その集合の 要素 という。

集合の表し方 ① { }の中に要素を書き並べて表す。例 $A=\{1, 2, 4, 8\}$

② 要素の満たす条件を書いて表す。例 $A=\{x \mid x \text{ は } 8 \text{ の正の約数}\}$

$x \in A$ (x は A に属する) x が集合 A の要素である

$x \notin A$ x が集合 A の要素でない

$A \subset B$ (A は B の部分集合) 集合 A のすべての要素が集合 B の要素でもある

$A=B$ (A と B は等しい) 集合 A と B の要素がすべて一致している

\emptyset (空集合) 要素が1つもない集合

図 $A=B$ であることは、「 $A \subset B$ かつ $A \supset B$ 」であることと同じである。

また、空集合 \emptyset は、どんな集合に対しても、その部分集合であると約束する。

② 共通部分と和集合

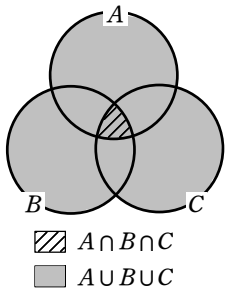
1 $A \cap B$ (A と B の共通部分) 集合 A, B のどちらにも属する要素全体の集合

$A \cup B$ (A と B の和集合) 集合 A, B の少なくとも一方に属する要素全体の集合

2 3つの集合の共通部分と和集合

$A \cap B \cap C$ (共通部分) 集合 A, B, C のすべてに属する要素全体の集合

$A \cup B \cup C$ (和集合) 集合 A, B, C の少なくとも1つに属する要素全体の集合



③ 補集合

\overline{A} (補集合) 全体集合 U の部分集合 A に対して U の要素で A には属さない要素全体の集合

補集合の性質 U を全体集合とし、 A, B をその部分集合とするとき

$A \cap \overline{A} = \emptyset, A \cup \overline{A} = U, \overline{\overline{A}} = A, A \subset B$ ならば $\overline{A} \supset \overline{B}$

図 \overline{A} は A の補集合を表す。

ド・モルガンの法則 1 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ 2 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

9 命題と条件

① 命題と条件

命題 正しい(真)か正しくない(偽)かが定まる文や式を 命題 という。

例1 「100は大きい数である」は、正しいか正しくないかが定まらないから、命題ではない。

例2 「5は奇数である」は、真の命題である。

例3 「 $\pi > 4$ である」は、 $\pi=3.1415\cdots$ であるから、偽の命題である。

条件 文字(x など)を含んだ文や式で、文字に値を代入することで真偽が定まるものを、(x に関する) 条件 という。

例 「 $x > 3$ 」, 「 x は素数である」は、 x に関する条件である。

条件を考える場合には、条件に含まれる文字がどんな集合の要素かをはっきりさせておく。この集合を、その条件の 全体集合 という。

② 命題 $p \implies q$

1 命題 $p \implies q$ は、「 p を満たすものはすべて q を満たす」ということを表す。 p を 仮定, q を 結論 という。

2 全体集合を U とし、 U の要素のうち、条件 p を満たすもの全体の集合を P , 条件 q を満たすもの全体の集合を Q とするとき、「命題 $p \implies q$ が真である」と「 $P \subset Q$ が成り立つ」とは同じことである。

すなわち、 $p \implies q$ が真ならば、 $P \subset Q$ が成り立つ。逆に、 $P \subset Q$ が成り立てば、 $p \implies q$ は真である。

反例 偽である命題 $p \implies q$ において、 p を満たすが q を満たさないものを 反例 という。命題が偽であることを示すには、反例を1つだけあげればよい。

③ 必要条件と十分条件

2つの条件 p, q について、命題 $p \implies q$ が真であるとき、

p は q であるための 十分条件 である、

q は p であるための 必要条件 である

という。

同値 2つの条件 p, q について、

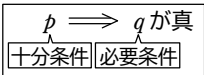
$p \implies q$ が真 かつ $q \implies p$ が真、すなわち $p \iff q$ が成り立つとき、

p は q であるための (q は p であるための) 必要十分条件 であるという。

このとき、 p と q は 同値 であるという。

条件 p, q を満たすもの全体の集合を、それぞれ P, Q とすると、

$p \iff q$ が成り立つことと $P=Q$ が成り立つことは同じである。



④ 条件の否定

否定 条件 p に対して、「 p でない」という条件を p の 否定 といい、 \overline{p} で表す。

条件 \overline{p} の否定は p である。

「かつ」の否定、「または」の否定 条件 p, q に対して、次が成り立つ。

$\overline{p \text{ かつ } q} \iff \overline{p} \text{ または } \overline{q}$

$\overline{p \text{ または } q} \iff \overline{p} \text{ かつ } \overline{q}$

10 命題と証明

① 命題の逆, 対偶, 裏

命題 $p \implies q$ に対して

$q \implies p$ を $p \implies q$ の 逆

$\overline{q} \implies \overline{p}$ を $p \implies q$ の 対偶

$\overline{p} \implies \overline{q}$ を $p \implies q$ の 裏

という。

命題 $p \implies q$ とその逆, 対偶, 裏は、互いに右の図のような関係にある。

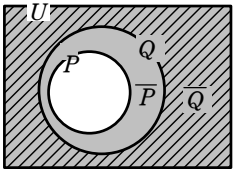
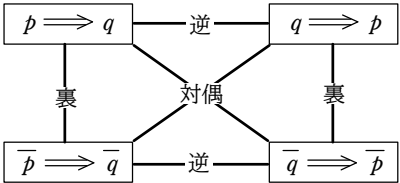
1 もとの命題が真であっても、その逆が真であるとは限らない。

2 命題 $p \implies q$ とその対偶 $\overline{q} \implies \overline{p}$ の真偽は一致する。

【参考】 一般に、集合 P, Q について

$P \subset Q \iff \overline{Q} \subset \overline{P}$

が成り立つ。このことから、命題とその対偶の真偽は一致することがわかる。



② 対偶を利用する証明

命題 $p \implies q$ を証明するのに、その対偶 $\overline{q} \implies \overline{p}$ を証明してもよい。

③ 背理法を利用する証明

命題が成り立たないと仮定して矛盾を導くことにより、もとの命題が真であると結論する。そのような証明方法を 背理法 という。

背理法を利用して命題 $p \implies q$ を証明するときは、 p かつ \overline{q} を仮定して矛盾を導く。

発展 「すべて」と「ある」の否定

① 命題の否定

命題の 否定 とは、その命題が成り立たないことを表す命題である。

一般に、命題とその否定では、真偽が逆になる。

② 「すべて」と「ある」を含む命題の否定

命題とその否定について、次のことが成り立つ。

p は x に関する条件とする。

命題「すべての x について p 」の否定は 「ある x について \overline{p} 」

命題「ある x について p 」の否定は 「すべての x について \overline{p} 」