$\cos x \cosh x$ と $\sin x \sinh x$

伊藤　裕（いとう　ゆたか）

§1. はじめに

参考文献〔1〕の「Ramanujan の数学」を見ていたとき，次の箇所に目が止まった。

「他にも超幾何級数に関する奇妙な公式に，やはり特殊値を代入することで，

$$\cos x \cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x^2)^{2k}}{(4k)!} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\sin x \sinh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2x^2)^{2k+1}}{(4k+2)!} \quad \cdots\cdots ②$$

のごとき，人を食ったような公式を山ほど導きだしている。(中略)上の二つの公式などは，美的感覚と茶目っ気の融合した傑作と思う。」

どちらも初めて見る公式でありとても面白いと思ったが，超幾何級数に触れたことがないため，Ramanujan がどのように上の公式を導いたのか全く見当が付かなかった。

しかし，複素関数として sin，cos を考えると公式①，②が導けるのでは，とその時感じた。そこで，その方向で考えてみたところ上手くいったので，以下でその証明を述べたい。

§2. 準備

複素級数 $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ について，$\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ が収束するとき，複素級数 $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ は絶対収束するという。絶対収束する級数について，次が成り立つ。

・複素級数 $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ が絶対収束するとき，複素級数 $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ は収束する。

・複素級数 $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$，$\sum_{k=0}^{\infty} w_k$ がともに絶対収束するとき，

$$\sum_{k=0}^{\infty} z_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} w_k = \sum_{k=0}^{\infty} (z_k \pm w_k)$$

が成り立つ。

複素数 z に対して，指数関数 e^z を

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

と定める。この無限級数はすべての複素数 z について絶対収束するので，すべての複素数 z に対して e^z が定まる。

さらに，三角関数 $\sin z$，$\cos z$ を

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

と定める。これですべての複素数 z に対して $\sin z$，$\cos z$ が定まる。

このように定めた複素変数の指数・三角関数は，実変数の場合の拡張になっている。

これらの性質の証明については，適当な関数論の本などを参照して頂きたい。

§3. 公式①，②を導く

上の三角関数の定義から，実数 x に対して

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\cos x \cosh x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \cdot \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\left(e^{(i+1)x} + e^{(i-1)x} + e^{-(i-1)x} + e^{-(i+1)x}\right) \\
&= \frac{1}{4}\Bigg(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i+1)^n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i-1)^n}{n!} x^n \\
&\qquad + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (i-1)^n}{n!} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (i+1)^n}{n!} x^n\Bigg)
\end{aligned}$$

1 番目と 4 番目の $\sum$，2 番目と 3 番目の $\sum$ でまとめて

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(i+1)^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2(i-1)^{2n}}{(2n)!} x^{2n}\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i+1)^{2n} + (i-1)^{2n}}{(2n)!} x^{2n}
\end{aligned}$$

ここで，

$$(i+1)^{2n} + (i-1)^{2n} = (2i)^n + (-2i)^n = (1 + (-1)^n) i^n 2^n$$

であるから，$n=2k$（k は 0 以上の整数）のとき，

$$(i+1)^{2n}+(i-1)^{2n}=2(-1)^k 2^{2k}$$

$n=2k+1$（k は 0 以上の整数）のとき，

$$(i+1)^{2n}+(i-1)^{2n}=0$$

である。これより，

$$\cos x\cosh x=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(-1)^k 2^{2k}}{(2\cdot 2k)!}x^{2\cdot 2k}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2x^2)^{2k}}{(4k)!}$$

を得る。

公式②については，

$$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

を用いて同様に計算すると得られる。

複素関数を経由して実関数の等式を導く所に面白さを感じる。

§4. $\cos x \sinh x$ と $\sin x \cosh x$

公式①，②から，$\cos x\sinh x$ と $\sin x\cosh x$ についても，同様の公式を導くことを考える。

$$(\cos x\cosh x)'=-\sin x\cosh x+\cos x\sinh x$$
$$(\sin x\sinh x)'=\cos x\sinh x+\sin x\cosh x$$

であるから，この両式を加えて，

$$\cos x\sinh x=\frac{1}{2}\{(\cos x\cosh x)'+(\sin x\sinh x)'\}$$

となる。

ここで，公式①，②の無限級数は項別微分が可能であるから（これも証明については適当な解析学の本などを参照），

$$\cos x\sinh x$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2x^2)^{2k}}{(4k)!}\right)'+\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2x^2)^{2k+1}}{(4k+2)!}\right)'\right\}$$
$$=2x\left\{\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k)(2x^2)^{2k-1}}{(2\cdot 2k)!}\right)+\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)(2x^2)^{2k}}{(2(2k+1))!}\right)\right\}$$
$$=2x\left\{\left(-\frac{2(2x^2)^1}{(2\cdot 2)!}+\frac{4(2x^2)^3}{(2\cdot 4)!}-\frac{6(2x^2)^5}{(2\cdot 6)!}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{(2\cdot 1)!}-\frac{3(2x^2)^2}{(2\cdot 3)!}+\frac{5(2x^2)^4}{(2\cdot 5)!}-\frac{7(2x^2)^6}{(2\cdot 7)!}+\cdots\right)\right\}$$
$$=2x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}k(2x^2)^{k-1}}{(2k)!}$$
$$=2x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}k\cdot 2^{k-1}\cdot x^{2k-2}}{(2k)!}$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}(k\cdot 2^k)x^{2k-1}}{(2k)!}$$

を得る。

$\sin x\cosh x$ については，

$$\sin x\cosh x=\frac{1}{2}\{(\sin x\sinh x)'-(\cos x\cosh x)'\}$$

であるから，

$$\sin x\cosh x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\frac{(k+2)(k+3)}{2}}(k\cdot 2^k)x^{2k-1}}{(2k)!}$$

を得る。

§5. 入試問題

§3 の計算のところで，次の入試問題を思い出したので紹介しておく。

> **【問題】** i は虚数単位とする。
>
> $$(1+i)^n+(1-i)^n>10^{10}$$
>
> を満たす最小の正の整数 n を求めよ。
>
> （京都大学 2019）

極形式を用いる解法が一般的であると思うが，本稿の流れに沿った略解を述べる。m を 0 以上の整数として，

$n=2m$ のとき，

$$(1+i)^n+(1-i)^n=(1+(-1)^m)i^m 2^m$$

$n=2m+1$ のとき，

$$(1+i)^n+(1-i)^n$$
$$=\{(1+(-1)^m)+(1-(-1)^m)i\}i^m 2^m$$

である。

さらに，k を 0 以上の整数として $m=2k,\ 2k+1$ と場合分けすれば，

$$(1+i)^n+(1-i)^n$$
$$=\begin{cases}(-1)^k 2^{2k+1} & (n=4k\ \text{のとき})\\ (-1)^k 2^{2k+1} & (n=4k+1\ \text{のとき})\\ 0 & (n=4k+2\ \text{のとき})\\ (-1)^{k+1}2^{2k+2} & (n=4k+3\ \text{のとき})\end{cases}$$

となる。あとは，常用対数を用いて

$$2^{2k+1}>10^{10},\quad 2^{2k+2}>10^{10}$$

を満たす k の範囲を求め，符号に注意して計算すれば，求める最小の n は 71 となる。

§6. おわりに

超幾何級数を利用する方法に比べるとかなり地味な方法ではあると思うが，複素関数を用いることで予想以上にあっさりと公式①，②を導くことができた。

そして，このような面白い公式を数多く発見した Ramanujan の凄さを，初めて肌で感じることとなった。

《参考文献》

〔1〕 藤原正彦　Ramanujan の数学
https://www.jstage.jst.go.jp/article/sugaku1947/57/4/57_4_407/_pdf/−char/ja
〔2〕 山口博史　複素関数　朝倉書店

（神奈川県立生田高等学校）