111111111111111111 の素因数分解

内藤(ないとう)　康正(やすまさ)

§1. 18 桁のレプユニット数の素因数分解に挑戦

2018 年度の冬休みに『$\frac{1}{19}$ を利用して 18 桁の巨大な数の素因数分解に挑む』と題した講習を行いました。以前，数学Ａの授業で「循環小数の循環節の長さは何の役に立つのか」という素朴な質問を受けたことがありました。「1÷7 の小数第 100 位の数字は何か」といった問題では飽きたりないという意味だったようです。そこで循環小数とレプユニット数の関係をもとに教材化を試みた次第です。

大学入学共通テストの 1 期生となる 2018 年度入学生が対象でしたので，問題解法のパターン学習ではなく未知の設定に取り組めるよう，素因数分解する数は講習当日に発表し，誘導を減らして解法の自由度を高めるなどの工夫をしました。また，2017 年度に実施された第 1 回プレテスト数ＩＡの第 5 問がそうであるように，作業や実験を通して背後の数理を見抜くこともこれまで以上に求められる要素だと感じ，その点も意識をして講習内容を練りました。2，3 年生も自由参加を呼びかけたところ，1 年生 6 名，2 年生 2 名の計 8 名が集まり，アットホームな講習となりました。

レプユニット数とは，十進数ですべての位の数字が 1 となる自然数のことで，本稿でも慣例にならって n 桁のレプユニット数を R_n で表します。R_n の素因数分解は次のようになります。

$R_2=11$　(素数)

$R_3=111=3\cdot37$

$R_4=1111=11\cdot101$

$R_5=11111=41\cdot271$

$R_6=111111=3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37$

$R_7=1111111=239\cdot4649$

$R_8=11111111=11\cdot73\cdot101\cdot137$

$R_9=111111111=3^2\cdot37\cdot333667$

$R_{10}=1111111111=11\cdot41\cdot271\cdot9091$

$R_{11}=21649\cdot513239$

$R_{12}=3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37\cdot101\cdot9901$

$R_{13}=53\cdot79\cdot265371653$

$R_{18}=3^2\cdot7\cdot11\cdot13\cdot19\cdot37\cdot333667\cdot52579$

初めての試みでしたので，記憶の新しいうちに記録しておきたいと考え，小文にしてみました。

(編集部注：2019 年 1 月に投稿されたものです。)

§2. 講習の概要

事前課題と，当日の内容は以下の通りです。

□事前課題

1．必須課題

$\frac{1}{19}$ を小数に直したときの循環節を求める。

2．自由課題

ある分数を小数に直したときの循環節の長さを，割り算をせずに合同式を用いてできるだけ早く求める方法を研究し，(例えば) 1÷51 で説明できるようにしてくる。

3．おまけ課題

$\frac{1}{19}$ の循環節について，面白い性質を 2 つ以上見つけてくる。

□講習当日のプログラム

1．目標

18 桁の数 111111111111111111 を素因数分解する。

2．約束

素因数 p を見つけるために，p で割って確かめない。

3．ヒント 1 (講義)

R_4 と R_6 の素因数分解について

4．素因数分解の挑戦 (作業)

5．ヒント 2 (講義)

循環節と R_n の素因数との関係について

6．素因数分解の再挑戦（作業）

7．まとめ・余談

§3. 1111 と 111111 の素因数分解の講義

講習は，3 桁の好きな数 ABC を 2 つ並べた 6 桁の数 $ABCABC$ を紙に書くところからスタートしました。これを 7，11，13 で順次割っていくと全員割り切れるという手品で，さらにその商は ABC になります。そのわけは

$$\begin{aligned} ABCABC &= ABC\times1000+ABC=1001\times ABC \\ &= 7\times11\times13\times ABC \end{aligned}$$

という式変形で明らかになります。この最初の変形を利用すると

$$R_4=1111=100\cdot11+11=11\cdot101$$

という変形ができ，R_4 に関してはこれが素因数分解になります。この結果を $R_4=R_2\cdot101$ と見れば，

$$R_6=R_3\cdot1001$$

$$R_8=R_4\cdot10001$$

などをまとめて

$$R_{2n}=R_n\cdot(10^n+1) \qquad \cdots\cdots①$$

と公式化しておくこともできます。①は必ずしも R_{2n} の素因数分解を表しているわけではないことに注意しておきます。

ここからが「ヒント 1」の本題です。

「R_6 については $R_6=R_3\cdot1001$ 以外の変形ができないか？」と発問したところ，即座に

$$R_6=110000+1100+11=11\cdot10101$$

という返答が得られました。これに関しては

$$R_{3n}=R_n\cdot(10^{2n}+10^n+1)$$

と一般化できることや，さらに

$$R_1=3\cdot37$$

$$R_2=33\cdot3367$$

$$R_3=333\cdot333667$$

$$R_4=3333\cdot33336667\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots※$$

という見方もできます。しかし解法の自由度確保の観点から紹介は控えました。全くの蛇足ですが，※の右辺から左辺の計算は次のように気持ちの良い筆算になります。

$$\begin{array}{r} 33336667 \\ 3333 \\ \hline 100010001 \\ 100010001 \\ 100010001 \\ 100010001 \\ \hline 111111111111 \end{array}$$

閑話休題。これで R_6 は 2 通りに因数分解できたことになります。すなわち

$$R_6=111\cdot1001=11\cdot10101$$

です。ここで 111 と 11 が互いに素であることから 1001 は 11 を約数にもつことがわかり，実際に割り算すると

$$1001=11\cdot91=7\cdot11\cdot13$$

また，$111=3\cdot37$ から

$$R_6=111111=3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37 \qquad \cdots\cdots②$$

という素因数分解を得ます。ここまでを講義し，これをヒントにいよいよ素因数分解の挑戦がスタートしました。

§4. 素因数分解の挑戦

R_{18} すなわち 11 京 1111 兆 1111 億 1111 万 1111 という巨大な数の素因数分解です。上の講義の最中からこそこそと作業をする生徒もいましたが，講義が終わると一斉に

$$R_{18}=R_2\cdot10101010101010101$$

$$R_{18}=R_3\cdot1001001001001001$$

$$R_{18}=R_6\cdot1000001000001$$

$$R_{18}=R_9\cdot1000000001$$

などをもとに試行錯誤が始まりました。計算はすべて手作業で，最初は動きも鈍かったのですが，すぐに慣れてきました。

例えば

$$R_6\cdot1000001000001=R_9\cdot1000000001$$

とすると，左辺については

$$1000001000001=3\cdot333333666667$$

右辺については

$$R_9=111\times1001001=3\cdot37\times3\cdot333667$$

から，②も合わせると等式

$$\begin{aligned} &3^2\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37\cdot333333666667 \\ &\qquad =3^2\cdot37\cdot333667\cdot1000000001 \end{aligned}$$

を得ます。両辺を比較すると，1000000001 が $7\cdot11\cdot13=1001$ で割り切れることが分かり，実際に割って $1000000001=1001\cdot999001$

したがって

$$R_{18}=3^2\cdot37\cdot333667\cdot7\cdot11\cdot13\cdot999001 \qquad \cdots\cdots ③$$

となります。再び蛇足ですが，1000000001÷1001 の筆算も，電卓では味わえない面白さがあり，生徒は結構楽しんでいる様子でした。

30 分ほどの作業の後，2 人 1 組になって途中経過をつき合わせた上でペアごとに発表してもらったところ，1 年生ペアが見事③を導いていました。

残すところ，333667 と 999001 が問題です。

§5. 循環節と素因数分解の関係の講義

ここで「あと，もう一歩であること」を宣言し，事前課題 1 の結果が役にたつことを伝えました。$\dfrac{1}{19}$ の循環節の長さ 18 から最後の素因数をどうやって見つけるのか，全員で考えましたが，生徒からは良い案は出ませんでした。そこで(予定通りではありますが) $\dfrac{1}{7}$ を例に循環節の長さと素因数の関係について次のような講義をすることにしました。

$\dfrac{1}{7}$ を小数表示すると，6 桁の循環節をもつ循環小数 $0.\dot{1}4285\dot{7}$ になり，これを再び分数に直すには $x=0.\dot{1}4285\dot{7}$ とおいて $1000000x-x$ から

$$x=\frac{142857}{999999}=\frac{1}{7} \qquad \cdots\cdots ④$$

とするのは定番の作業です。

「この④を $142857\times7=9\times111111$ と見れば，何が分かるか？」と発問したところ，しばらくして，7 と 9 が互いに素であることから「$R_6=111111$ が素因数 7 をもつこと」に気がつき始めました。「互いに素」がいかに重要か，実感することができたと思います。こうして

「$\dfrac{1}{7}$ が 6 桁の循環節をもつこと」

と

「R_6 が 7 で割り切れること」

がつながりました。

一般には，素数 3 (9 と互いに素でない) と，2，5 (循環小数にならない) を例外として，次のようにまとめることができます。

> p を 7 以上の素数とする。
> $\dfrac{1}{p}$ の小数表示が e 桁の循環節をもつとき，e 桁のレプユニット数 R_e は素因数 p をもつ。

さらに $e<p$ は明らかですから，素数 p は R_p より小さいレプユニット数の約数として必ず現れます。例えば

7 は $R_6=111111$ の素因数

11 は $R_2=11$ の素因数

13 は $R_6=111111$ の素因数

などとなっています。

結局 $1\div19=0.\dot{0}5263157894736842\dot{1}$ から循環節の長さは 18 であり，R_{18} が 19 で割り切れることが分かります。最終的には

$$R_{18}=3^2\cdot7\cdot11\cdot13\cdot19\cdot37\cdot333667\cdot52579$$

で素因数分解の完成です。333667，52579 は素数であることを伝え，素因数分解の作業完了を宣言しました。(間の取り方が悪かったようで，拍手喝采とはなりませんでした。)

§6. まとめと余談

⑥は $999999=7\times142857$ すなわち

$10^6=7\times142857+1$

$10^6\equiv1 \pmod 7$

でもありますから，$\dfrac{1}{n}$ の小数表示が e 桁の循環節をもつことは $10^e\equiv1 \pmod n$ と関連がありそうです。$n=7$ の場合，10^e で $e=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ とした式は，次のように $1\div7$ の筆算の過程そのものです。

$10^1=7\times1+3$

$10^2=7\times14+2$

$10^3=7\times142+6$

$10^4=7\times1428+4$

$10^5=7\times14285+5$

$10^6=7\times142857+1$

$e=6$ で初めて $10^e\equiv1 \pmod 7$ となり，その 6 が循環節の長さになるというわけです。

一般には次のようにまとめることができます。

> $(10,\ n)=1$ とする。このとき $\dfrac{1}{n}$ の小数表示の循環節の長さは，$10^e\equiv1 \pmod n$ となる最小の自然数 e で与えられる。

以上を説明した後「$\dfrac{1}{19}$の場合で合同式を使って18桁で循環することを示すには？」と発問したところ，合同式を学んだばかりのある1年生が，次のように計算してくれました。

$10^1 \equiv 10 \pmod{19}$

$10^2 = 100 = 19 \cdot 5 + 5 \equiv 5 \pmod{19}$

$10^3 = 10 \cdot 10^2 \equiv 10 \cdot 5 \equiv -7 \pmod{19}$

$10^6 = (10^3)^2 \equiv 49 \equiv -8 \pmod{19}$

$10^9 = 10^3 \cdot 10^6 \equiv 56 \equiv -1 \pmod{19}$

$10^{18} = (10^9)^2 \equiv 1 \pmod{19}$

「負の余り」も器用に用いながらの計算は見事で，これが事前課題2の解説となりました。

事前課題3については，循環節を二分して加えると999999999になることを見つけた生徒がいましたが，三分して加えると999999になることや，循環節が下位の方から1，2，4，8，…となっていることに気づいた生徒はいませんでした。

$$\begin{array}{r} 0\,5\,2\,6\,3\,1\,5\,7\,8 \\ +)\ 9\,4\,7\,3\,6\,8\,4\,2\,1 \\ \hline 9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9\,9 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0\,5\,2\,6\,3\,1 \\ 5\,7\,8\,9\,4\,7 \\ +)\ 3\,6\,8\,4\,2\,1 \\ \hline 9\,9\,9\,9\,9\,9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \\ 1\,6 \\ 3\,2 \\ 6\,4 \\ +)\quad \cdots \\ \hline \cdots 4\,7\,3\,6\,8\,4\,2\,1 \end{array}$$

なぜこのような不思議なことが起きるのかは，今後の研究課題として残しました。

最後に30分程度，用意しておいた3つの余談と，

「(西暦)2，0，1，8の数字を1つずつと，知っている記号，演算を自由に使って(平成)30を作れ」

というパズルを皆で楽しみました。

このパズルは，知り合いの先生作の年賀パズルですが，2年生はすぐに $10\log_2 8 = 30$ を見つけました。ただ，これは対数を知っているか否かの問題です。「他の解が腕の見せ所で，今日の講習が少しヒントになる」と伝えましたが時間切れとなりました。いろいろな解がありますが，解の1つ

$(2+8) \div \sqrt{0.\dot{1}} = 30$

を紹介し，「簡単なことを使いこなすことは難しい」という話になったところで講習を締めくくりました。

考えてみれば，講習で用いた基礎知識も「当たり前に近いやさしいもの」ばかりです。特に「整数の性質」分野の基本は極めて少なく，今回の講習で用いた

「a，bが互いに素で，akがbの倍数であれば
kはbの倍数である」

もその1つです。簡単なことを使いこなす点が整数問題の難しさの本質かもしれないと感じます。

§7. 結びにかえて

講習後しばらくして教室の施錠に行くと4人の生徒が残っていて，分からなかったところを教え合ったり，計算の合わないところを確認したりしていました。アンケート等はとらなかったのですが，この光景を見て全体として講習は成功だったのではないかと感じることができました。ただ，ヒントについては次のような改善点があると感じました。

(1) ヒント1について

全体として時間には余裕があったので，「R_4の素因数分解の方法をヒントに，R_6を素因数分解せよ」程度でもよかった。

(2) ヒント2について

循環節の長さ18とR_{18}の素因数の関係を見抜けるよう，もう少し適切なヒントを加えてもよかった。

《参考文献》

〔1〕『数学文化』008号
上野健爾「数のふしぎ」
〔2〕 Dウェルズ著　芦ケ原伸之・滝沢清訳
『数の辞典』

(東京都立立川高等学校)