83 年京大の巴戦の問題の「方程式による解法」の研究

畑（はた）　健樹（げんき）

§1. 巴戦の問題

以下のような問題は,「巴戦の問題」と言われている。

> A, B, C の 3 高校が野球の試合をする。まず 2 校が対戦して，勝った方が残りの 1 校と対戦をする。これを繰り返して，2 連勝した高校が優勝をする。A 校が B, C 校に勝つ確率をそれぞれ p, q とし，B 校がC校に勝つ確率を $\frac{1}{2}$ とする。次の確率をそれぞれ求めよ。ただし，$0<p<1$, $0<q<1$ とする。
>
> (1) 第 1 戦にA校とB校が対戦した場合，A 校がB校に勝って優勝する確率。
>
> (2) 第 1 戦にA校とB校が対戦した場合，A 校がB校に負けて優勝する確率。
>
> (3) 第 1 戦にB校とC校が対戦した場合，A 校が優勝する確率。
>
> (83 年　京都大学)

巴戦の問題の解法は「無限等比級数による解法」と「方程式による解法」が知られている。実力が互角である $\left(p=q=\frac{1}{2}\right)$ 巴戦の「方程式による解法」(3 元 1 次連立方程式を解く)は見受けられるが，本問のように実力差がある場合の巴戦の「方程式による解法」は見受けられない。それは，どの確率を文字で設定すればよいかが技巧的で難しいからである。そこで，本問でよく見られる「無限等比級数による解法」を提示した上で見通しの良い「方程式による解法」を提案したい。さらに,「方程式による解法」のメリットを考察した上で，巴戦の問題に対する解法の指導について研究したいと思う。

§2. 無限等比級数による解法

(1) 求める確率を P とおく。

条件を満たしA校が優勝する可能性があるのは第 2 戦目，第 5 戦目，第 8 戦目，……である。

第 2 戦目でA校が優勝する確率は，第 1 戦にA校がB校に勝ち，第 2 戦にA校がC校に勝つときで，その確率は　pq

第 5 戦目でA校が優勝する確率は，第 1 戦にA校がB校に勝ち，第 2 戦にC校がA校に勝ち，第 3 戦にB校がC校に勝ち，第 4 戦にA校がB校に勝ち，第 5 戦にA校がC校に勝つとき[*1]で，その確率は　$p(1-q)\cdot\frac{1}{2}\cdot pq=\frac{p(1-q)}{2}pq$

第 8 戦目でA校が優勝する確率は，同様に考えると　$\left\{\frac{p(1-q)}{2}\right\}^2 pq$

以下，同様に考えていくと求める確率 P は,

$$P=\left\{1+\left(\frac{p(1-q)}{2}\right)+\left(\frac{p(1-q)}{2}\right)^2+\cdots\cdots\right\}pq$$

$\{\ \}$ 内は，初項 1，公比 $\frac{p(1-q)}{2}$ の無限等比級数で，公比が $0<\frac{p(1-q)}{2}<1$ を満たすので収束する。

よって　$P=\dfrac{1}{1-\dfrac{p(1-q)}{2}}pq=\dfrac{2pq}{2-p+pq}$

(2) 求める確率を Q とおく。

条件を満たしA校が優勝する可能性があるのは第 4 戦目，第 7 戦目，第 10 戦目，……である。

[*1] 3 章　方程式による解法(1)の表を参照

第4戦目でA校が優勝する確率は，第1戦にB校がA校に勝ち，第2戦にC校がB校に勝ち，第3戦にA校がC校に勝ち，第4戦にA校がB校に勝つとき[*2]で，その確率は

$$(1-p)\cdot\frac{1}{2}\cdot qp=\frac{1-p}{2}pq$$

以下，同様に考えていくと，求める確率Qは，

$$Q=\left\{1+\frac{q(1-p)}{2}+\left(\frac{q(1-p)}{2}\right)^2+\cdots\cdots\right\}\frac{1-p}{2}pq$$

{ }内は，初項1，公比$\dfrac{q(1-p)}{2}$の無限等比級数で，公比が $0<\dfrac{q(1-p)}{2}<1$ を満たすので収束する。

よって　$Q=\dfrac{1}{1-\dfrac{q(1-p)}{2}}\cdot\dfrac{1-p}{2}pq=\dfrac{pq(1-p)}{2-q+pq}$

(3)　第1戦目で，B校がC校に勝ったとき，第2戦目はA校とB校が対戦する[*3]ことになり，ここからA校が優勝する確率はPだから　$\dfrac{2pq}{2-p+pq}$

ゆえに，第1戦目でB校がC校に勝ったとき，A校が優勝する確率は　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2pq}{2-p+pq}=\dfrac{pq}{2-p+pq}$

同様にして，第1戦目で，C校がB校に勝ったとき，第2戦目はA校とC校が対戦する[*4]ことになり，ここからA校が優勝する確率はPのpとqを入れ替えて　$\dfrac{2pq}{2-q+pq}$

ゆえに，第1戦目でC校がB校に勝ったとき，A校が優勝する確率は　$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2pq}{2-q+pq}=\dfrac{pq}{2-q+pq}$

よって，求める確率は

$$\frac{pq}{2-p+pq}+\frac{pq}{2-q+pq}$$
$$=\frac{pq(4-p-q+2pq)}{(2-p+pq)(2-q+pq)}$$

[*2] 3章　方程式による解法(2)の表を参照
[*3] 3章　方程式による解法(3)の左表を参照
[*4] 3章　方程式による解法(3)の右表を参照

§3. 方程式による解法

(1)　A校がB校に勝った後にA校が優勝する確率をxとおく。

回	1	2	3	4
勝	A	C	B	A
負	B	A	C	B
待	C	B	A	C

……

第2戦目でA校がC校に勝ったときは優勝し，C校に負けたときは，表のように試合が遷移していく。第5戦目以降A校が優勝する確率はxなので，xについて次の方程式を立てることができる。

$$x=q+(1-q)\cdot\frac{1}{2}px$$

これを解いて　$x=\dfrac{2q}{2-p+pq}$

第1戦目にA校がB校に勝つ確率はpなので，求める確率は

$$px=\frac{2pq}{2-p+pq}$$

(2)　A校がB校に負けた後は次の表のように試合が遷移する。

回	1	2	3	4
勝	B	C	A	B
負	A	B	C	A
待	C	A	B	C

……

A校が優勝するのはA校がC校に勝った後なので，A校がC校に勝った後に優勝する確率をyとおく。(1)のB校をC校に変えただけなので確率xのpとqを入れ替えて　$y=\dfrac{2p}{2-q+pq}$

第4戦目まで遷移する確率を考えて，A校がB校に負けて優勝する確率は

$$(1-p)\cdot\frac{1}{2}qy=\frac{pq(1-p)}{2-q+pq}$$

(3)　第1戦目のB校とC校の対戦結果で試合の遷移が次の2通りに分かれる。

回	1	2
勝	B	A
負	C	B
待	A	C

……

回	1	2
勝	C	A
負	B	C
待	A	B

……

B校がC校に勝った後にA校が優勝する(左表)確率は$\dfrac{1}{2}px$であり，C校がB校に勝った後にA

校が優勝する（右表）確率は $\frac{1}{2}qy$ だから，求める確率は

$$\frac{1}{2}px+\frac{1}{2}qy=\frac{pq}{2-p+pq}+\frac{pq}{2-q+pq}$$
$$=\frac{pq(4-p-q+2pq)}{(2-p+pq)(2-q+pq)}$$

§4. あとがき

方程式による解法のメリットは

① 数学Ⅲを経由せず数学ⅠＡⅡＢの範囲で議論できる。（数学Ⅲ未履修者でも解ける。）

② 計算がほとんどない。

③ ⑶の解答が大変明快。

の３点である。どのメリットも重要な点であるが，数学Ⅲ履修者にはこうすれば簡単に解けると最初から教えるのではなく，やはり先に無限等比級数による解法を教えた後に別解としてこの解法を教える方が生徒の学力向上という点では望ましいと思われる。それは無限等比級数による解法の方が考察することで自然に行きつく解法だからである。冒頭でも述べたが方程式による解法はどの確率を文字でおくか，という点が技巧的で難しい。

巴戦の問題は2016年に東大が出題していることもあり，１度取り組んでみてもよい題材だと思う。

（大阪府　阪南大学高等学校）