辺の長さの和と表面積と体積の同時 k 倍について
〜立方体の $k\,(>1)$ 倍になる直方体は存在しないこと〜

西元（にしもと）　教善（のりよし）

§1. はじめに

生徒が質問に来た問題の中に,「$k>1$ のとき，周の長さと面積のそれぞれがともに元の長方形の k 倍になる長方形が存在すること」を問うものがあった。もちろん正方形についても次のように成り立つ。

1辺の長さが a である正方形に対して，周の長さが k 倍で，面積も k 倍である長方形があるためには，その2辺の長さを b，$c\,(b\leqq c)$ とすると
$b+c=2ka$，$bc=ka^2$ を満たせばよい。つまり b，c は x の2次方程式

$$x^2-2kax+ka^2=0 \quad \cdots\cdots①$$

の2つの正の解であればよい。

①の判別式を D とすると，$k>1$ より

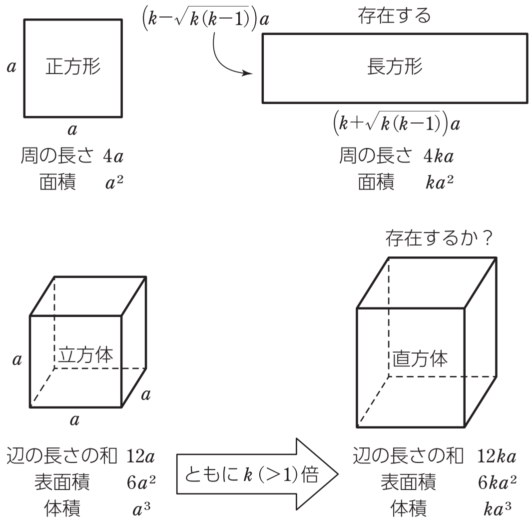
$$\frac{D}{4}=k^2a^2-ka^2=ka^2(k-1)>0$$

であるから，①は異なる2つの実数解をもち，
$b+c=2ka>0$，$bc=ka^2>0$ より正の解である。
実際，①を解くと $x=(k\pm\sqrt{k(k-1)})a$ であるから，

$$b=(k-\sqrt{k(k-1)})a,\quad c=(k+\sqrt{k(k-1)})a$$

である。

では，これを拡張して「1辺の長さが a である立方体に対して，辺の長さの和も表面積も体積も $k\,(>1)$ 倍である直方体は常に存在するか，ある条件のもとで存在するか，それとも存在しないか」について考察してみる。



§2. 辺の長さの和と表面積と体積が立方体の等倍になる直方体は存在しないこと

仮に，1辺の長さが a である立方体に対して，周の長さも表面積も体積も $k\,(>1)$ 倍である直方体は存在するとしてその3辺の長さを p，q，r とすると

$$p+q+r=3ka,\quad pq+qr+rp=3ka^2,\quad pqr=ka^3$$

が成り立つので，p，q，r は x の3次方程式

$$x^3-3kax^2+3ka^2x-ka^3=0 \quad \cdots\cdots②$$

の実数解で，すべて正でなければならない。

ここで，$f(x)=x^3-3kax^2+3ka^2x-ka^3$ とおくと $f'(x)=3x^2-6kax+3ka^2$ である。
次に x の2次方程式 $f'(x)=0$ つまり

$$x^2-2kax+ka^2=0 \quad \cdots\cdots③$$

を考え，その判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=k^2a^2-ka^2=a^2k(k-1)>0 \quad (\because\ k>1)$$

よって，②は異なる2つの実数解 α，$\beta\,(\alpha<\beta)$ を

もち $\alpha+\beta=2ka>0$，$\alpha\beta=ka^2>0$ より $\alpha>0$，$\beta>0$ である。

また，$f(x)$ は $x=\alpha$ で極大になり，$x=\beta$ で極小になる。$f(0)=-ka^3<0$ であるから

$f(\alpha)f(\beta)\leqq 0$ であることが示されれば，3 個の正の解をもち，これが p，q，r となる。

したがって，存在の有無は $f(\alpha)f(\beta)$ の符号に係っている。つまり，$f(\alpha)f(\beta)\leqq 0$ であれば存在し，$f(\alpha)f(\beta)>0$ であれば存在しない。

$f(\alpha)f(\beta)$ の符号について

まず，わかっていることは解と係数の関係から $\alpha+\beta=2ka$，$\alpha\beta=ka^2$ ということである。

また，$f(x)=x^3-3kax^2+3ka^2x-ka^3$ より

$$f(\alpha)=\alpha^3-3ka\alpha^2+3ka^2\alpha-ka^3,$$
$$f(\beta)=\beta^3-3ka\beta^2+3ka^2\beta-ka^3$$

であるから

$$f(\alpha)f(\beta)=(\alpha^3-3ka\alpha^2+3ka^2\alpha-ka^3)\times(\beta^3-3ka\beta^2+3ka^2\beta-ka^3)$$

これを展開して整理するのは面倒であるから，次のような表にまとめてから計算することにする。

表 1 は分配法則にしたがって展開するとき，$f(\alpha)$ にある α^3，α^2，α，定数項Cと $f(\beta)$ にある β^3，β^2，β，定数項Cによって出現する項を分類したものであり，表 2 はその項の係数が何であるかを分類したものである。

項

	α^3	α^2	α	C
β^3	$\alpha^3\beta^3$	$\alpha^2\beta^3$	$\alpha\beta^3$	Cβ^3
β^2	$\alpha^3\beta^2$	$\alpha^2\beta^2$	$\alpha\beta^2$	Cβ^2
β	$\alpha^3\beta$	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta$	Cβ
C	Cα^3	Cα^2	Cα	C^2

表 1

係数

	α^3	α^2	α	$-ka^3$
β^3	1	$-3ak$	$3a^2k$	$-a^3k$
β^2	$-3ak$	$9a^2k^2$	$-9a^3k^2$	$3a^4k^2$
β	$3a^2k$	$-9a^3k^2$	$9a^4k^2$	$-3a^5k^2$
$-ka^3$	$-a^3k$	$3a^4k^2$	$-3a^5k^2$	a^6k^2

表 2

係数は右下がりの対角線に関して対称になっている。係数について α，β の積の項をまとめると $\alpha^m\beta^n+\alpha^{3-m}\beta^{3-n}$ ($m=0$，1，2，3，$n=0$，1，2，3) となるので，これらが k，a でどのように表されるか先に計算しておく。

$\alpha+\beta=2ka$，$\alpha\beta=ka^2$ より

$$\alpha^3\beta^3=(\alpha\beta)^3=(ka^2)^3=k^3a^6$$
$$\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3=\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)=(\alpha\beta)^2(\alpha+\beta)=(ka^2)^2\cdot 2ka=2k^3a^5$$
$$\alpha^2\beta^2=(\alpha\beta)^2=(ka^2)^2=k^2a^4$$
$$\alpha^3\beta+\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)=\alpha\beta\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}=ka^2\{(2ka)^2-2ka^2\}=4k^3a^4-2k^2a^4$$
$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=\alpha\beta(\alpha+\beta)=ka^2\cdot 2ka=2k^2a^3$$
$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(2ka)^2-2ka^2=4k^2a^2-2ka^2$$

よって

$$\begin{aligned}f(\alpha)f(\beta)&=(\alpha^3-3ka\alpha^2+3ka^2\alpha-ka^3)\times(\beta^3-3ka\beta^2+3ka^2\beta-ka^3)\\
&=\alpha^3\beta^3-3ka(\alpha^3\beta^2+\alpha^2\beta^3)+9k^2a^2\alpha^2\beta^2\\
&\quad+3ka^2(\alpha^3\beta+\alpha\beta^3)-9k^2a^3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)\\
&\quad+3k^2a^4(\alpha^2+\beta^2)-3k^2a^5(\alpha+\beta)+k^2a^6\\
&=k^3a^6-3ka\cdot 2k^3a^5+9k^2a^2\cdot k^2a^4\\
&\quad+3ka^2(4k^3a^4-2k^2a^4)-9k^2a^3\cdot 2k^2a^3\\
&\quad+9k^2a^4\cdot ka^2+3k^2a^4(4k^2a^2-2ka^2)\\
&\quad-3k^2a^5\cdot 2ka+k^2a^6\\
&=k^3a^6-6k^4a^6+9k^4a^6+12k^4a^6-6k^3a^6\\
&\quad-18k^4a^6+9k^3a^6+12k^4a^6-6k^3a^6\\
&\quad-6k^3a^6+k^2a^6\\
&=(9k^4-8k^3+k^2)a^6\\
&=(9k^2-8k+1)k^2a^6>0\quad(\because\quad k>1)\end{aligned}$$

したがって，$f(\alpha)f(\beta)>0$ であることが示された。

先程言及したように，$f(\alpha)f(\beta)>0$ であると，辺の長さの和も表面積も体積も $k\,(>1)$ 倍である直方体は存在しないことになる。

§3. まとめ

本稿で扱った問題は，生徒に次のような問題として提示できる。

[1] $k>1$ のとき，1 辺の長さが a である正方形に対して，周の長さが k 倍で，面積も k 倍である長方形が存在するか，それとも存在しないか。存在するならば，そのときの 2 辺の長さを a と k を用いて表せ。存在しないならばその理由を説明せよ。

[2] $k>1$ のとき，1 辺の長さが a である立方体に対して，辺の長さの和も表面積も体積も k 倍である直方体は存在するか，それとも存在しないか。

存在するならば，そのときの３辺の長さを a と k を用いて表せ。存在しないならばその理由を説明せよ。

［１］は標準的な問題であろう。

［２］は存在するためには３次方程式から考えられる３次関数のグラフが x 軸の正の部分と異なる３点で交わるか，１点で接し，他の１点で交わればよいことに気付くか，存在しないのは－この場合は３次関数が極値をもつので－極大値と極小値の積が正であるときであることに気付くかがポイントになる。

また，極大値と極小値の積の計算が面倒になるが，それを手際よく，忍耐強く処理できるかもポイントになる。上位の生徒に取り組ませてみたい問題である。

（山口県立光高等学校）