逆関数の不定積分の公式

うすい　たつや
臼井　達哉

§1. 逆関数の不定積分の公式がない

ある関数の導関数がわかっていればその逆関数の導関数は必ず求められます。その公式は微積分の本には必ず載っています。ところが,「ある関数の不定積分がわかっている場合に，その逆関数の不定積分を求める公式」は見かけません。

特定の関数の逆関数についてはその不定積分の求め方はいろいろな書物に書いてあります。よく知られた例を 3 つ挙げます。以下では，積分定数は省略します。

例 1．e^x の逆関数 $\log x$ について

$$\int \log x\,dx = x\log x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\log x - x$$

例 2．$\sin x$ の逆関数 $\arcsin x$ について

$$\int \arcsin x\,dx = x\arcsin x - \int x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$
$$= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$$

例 3．$\tan x$ の逆関数 $\arctan x$ について

$$\int \arctan x\,dx = x\arctan x - \int x\frac{1}{x^2+1}\,dx$$
$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\log(x^2+1)$$

このようにどれも部分積分をもちいていますが，右辺の第 2 項の不定積分はそれぞれやり方が異なります。例 2 .例 3 .はそれほど簡単ではありません。この方法を一般的な逆関数について試してみます。

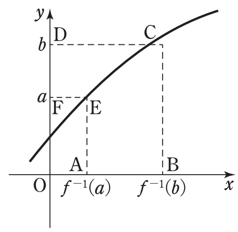
$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - \int x\{f^{-1}(x)\}'\,dx$$

右辺の第 2 項は式が最初より複雑になっています。このままでは一般的にどうなるか分かりません。しかし次のようにしてこれを求めることができます。

§2. 逆関数の不定積分を求める

この公式に気づいたときの考え方は次の通りです。

関数 $f(x)$ が逆関数をもち，$y=f(x)$ のグラフが[図 1]のようになっているとします。そして



[図 1]

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

とします。

図から面積について次の等式が成り立ちます。

$$\square\mathrm{OBCD} = \square\mathrm{OAEF} + \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(x)\,dx + \int_a^b f^{-1}(y)\,dy$$

見やすくするために積分変数はすべて x とすると，この等式から,

$$\int_a^b f^{-1}(x)\,dx = \square\mathrm{OBCD} - \square\mathrm{OAEF} - \int_{f^{-1}(a)}^{f^{-1}(b)} f(x)\,dx$$
$$= bf^{-1}(b) - af^{-1}(a) - \{F(f^{-1}(b)) - F(f^{-1}(a))\}$$
$$= \{bf^{-1}(b) - F(f^{-1}(b))\} - \{af^{-1}(a) - F(f^{-1}(a))\}$$
$$= \Big[xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))\Big]_a^b$$

これは $xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x))$ が $f^{-1}(x)$ の不定積分の 1 つであることを意味します。

しかしこれは[図 1]のような場合にのみ成り立つだけかもしれません。そこで一般的な証明をします。

§3. 公式と証明

逆関数の不定積分の公式

$f(x)$ が逆関数 $f^{-1}(x)$ をもち,

$\int f(x)\,dx = F(x)$ ならば,

$$\int f^{-1}(x)\,dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) \qquad \cdots\cdots(*)$$

が成り立つ。

証明　$f(f^{-1}(x)) = x$, $F'(x) = f(x)$ であるから,（＊）の右辺を微分すると,

$$\{xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))\}'$$
$$=1\cdot f^{-1}(x)+x(f^{-1}(x))'-F'(f^{-1}(x))\cdot(f^{-1}(x))'$$
$$=f^{-1}(x)+x(f^{-1}(x))'-f(f^{-1}(x))(f^{-1}(x))'$$
$$=f^{-1}(x)+x(f^{-1}(x))'-x(f^{-1}(x))'$$
$$=f^{-1}(x)$$

ゆえに

$$\int f^{-1}(x)\,dx=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))$$ ［証明終］

§4. 応用

（＊）を最初に挙げた3つの例に用いてみます。

例1． $\int e^x dx=e^x$ より

$$\int \log x\,dx=x\log x-e^{\log x}=x\log x-x$$

例2． $\int \sin x\,dx=-\cos x$ より

$$\int \arcsin x\,dx=x\arcsin x+\cos(\arcsin x)$$

このように何も考えなくても（＊）に代入すれば求められます。ところがこれは最初の結果とは見かけ上異なります。$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$ となるはずです。これを確認します。

$y=\arcsin x$ とおくと $x=\sin y$

$\arcsin x$ の値域は $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ であるから

$$-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2}$$

ゆえに $\cos y\geqq 0$ となるから

$$\cos(\arcsin x)=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

例3． $\int \tan x\,dx=-\log|\cos x|$ より

$$\int \arctan x\,dx=x\arctan x+\log|\cos(\arctan x)|$$

この場合 $\log|\cos(\arctan x)|=-\dfrac{1}{2}\log(1+x^2)$ となるはずです。これも確かめてみます。

$y=\arctan x$ とおくと，$x=\tan y$

$\cos^2 y=\dfrac{1}{1+\tan^2 y}=\dfrac{1}{1+x^2}$ であるから，

$$\log|\cos(\arctan x)|=\log|\cos y|=\frac{1}{2}\log(\cos^2 y)$$
$$=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

このように（＊）を用いて得られた結果は分かりやすいとはいえません。そのためあまり用いられないのかもしれません。

§5. おわりに

（＊）はその形も証明も大変単純です。そのため私はこれに気がついたとき，自分が知らないだけでどこかに書いてあるだろうと思い，そのままにしていました。ところがそれから半世紀近く経った現在まで，（＊）そのものを示した文書は一度も見なかったので今回ネット検索してみました。

逆関数の定積分については［図1］と同様な図を用いて一般的な議論を行う例は結構ありました。しかし最終的には例1，2，3のような具体的な逆関数の定積分を求めています。

不定積分については大変少なく，最終的に逆関数の不定積分を（＊）のようにすべて x の式で表した例は1つも見つけられませんでした。そこでこの内容は意味があると判断し投稿することにしました。

（岐阜県立長良高等学校）