e の定義と，それに関する問題について

細木（ほそき）　翔太（しょうた）

§1. はじめに

数研出版　高等学校数学Ⅲ p.166 の 10(3) で，次のような問題がある。

問） $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ であることを用いて，次の極限を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$

教授資料の模範解答は次のようになっていた。

解） $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^2=e^2$

この解答について，考えを述べていきたい。

§2. 問題文について

「$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ であることを用いて」とは，「数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ の極限値が e であるという事実を利用して考えよ。」という意味である。

§3. 模範解答について

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^2=e^2$$

上の模範解答では，数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$ の極限値が e であることを用いている。

§4. 疑問

数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ の極限値が e である

$\Longrightarrow$ 数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$ の極限値が e である

という命題は成り立つものとして扱ってよいのだろうか。

数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ は，数列 $\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}$ の部分列である。

部分列の極限値と，もとの数列の極限が一致しないことは，数列 $\{(-1)^n\}$ などを考えれば明らかである。それを踏まえて，次のように解答を修正してみた。

§5. 修正した解答

(ア)　n が偶数のとき，$n=2k$（k は自然数）と表せる。$n\to\infty$ のとき，$k\to\infty$ であるから

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{2}{2k}\right)^{2k}$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right\}^2=e^2$$

(イ)　n が 3 以上の奇数のとき，$n=2k+1$（k は自然数）と表せる。

数列 $\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right\}$ は増加数列であるから　……①

$$\left(1+\frac{2}{2k}\right)^{2k}\leqq\left(1+\frac{2}{2k+1}\right)^{2k+1}\leqq\left(1+\frac{2}{2k+2}\right)^{2k+2}$$

$n\to\infty$ のとき，$k\to\infty$ であり，

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{2}{2k}\right)^{2k}=\lim_{k\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right\}^2=e^2$$
$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{2}{2k+2}\right)^{2k+2}=\lim_{k\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{k+1}\right)^{k+1}\right\}^2=e^2$$

であるから，はさみうちの原理により，

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{2}{2k+1}\right)^{2k+1}=e^2$$

(ア)(イ)より，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=e^2$$

ここで，① を相加相乗平均の大小関係を用いて示す。

$$\frac{\frac{n+2}{n}\cdot n+1}{n+1} \geqq \sqrt[n+1]{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n\cdot 1} \text{ より}$$

$$\frac{n+3}{n+1} \geqq \sqrt[n+1]{\left(\frac{n+2}{n}\right)^n}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n+1} \geqq \left(\frac{n+2}{n}\right)^n$$

$$\therefore \quad \left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} \geqq \left(1+\frac{2}{n}\right)^n$$

ゆえに，数列 $\left\{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n\right\}$ は増加数列である。

§6. おわりに

上の修正した解答を生徒に要求するのは酷であるように思う。特に①を示すのが大変である。最初，私は $f(x)=\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$ を微分して単調増加であることを示そうとした。しかし，この問題が「$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ を用いて」と述べているので，$\log x$ や e^x の微分を利用して考えるのは循環論法に陥る可能性があると気付き，相加相乗平均の大小関係を利用して示すに至った。これを思いつくまでにはかなりの時間を要した。

この問題が，「$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ を用いて」となっていれば，何の疑問もなく解答が書ける。e を定義する立場によって，解答が大きく変わる典型的な例として広まっていってほしい。

《参考文献》

〔1〕『高等学校　数学Ⅲ』(数研出版)

(埼玉県立蕨高等学校)