対数の近似値を使って 2 の 1000 乗の桁数を求められるか

吉田　節（よしだ　たかし）

§1. はじめに

「2^{50} の桁数を求めよ。ただし $\log_{10}2=0.3010$ とする。」という問題があります。解き方は以下の通り。$10^k \leqq 2^{50} < 10^{k+1}$ とおき，各辺の常用対数をとると

$$k \leqq 50\log_{10}2 < k+1 \quad \cdots\cdots ①$$

これに $\log_{10}2=0.3010$ を代入すれば $15 \leqq 15.05 < 16$ ですから，答えは 16 桁です。

しかし，累乗の指数が 50 でなく，例えば 10000 になったらどうなるでしょうか。対数は近似値を使っているのですからもちろん真の値とは異なり，累乗の指数によっては桁数に誤りが出る可能性があります。たいていは 30 乗とか 50 乗程度なので恐らく問題ないのですが，では指数がどの程度になると危ないのでしょうか。

§2. 桁数が求まるための条件

以下，2 の累乗の指数を m で表します。m，k は整数です。このとき，①は

$$k \leqq m\log_{10}2 < k+1 \quad \cdots\cdots ②$$

となります。m が大きくなると

$$m\log_{10}2 \text{ と } m \times 0.3010$$

の差が大きくなり，問題になるわけです。今，$a \leqq \log_{10}2 < b$ であるとします。各辺を m 倍して

$$ma \leqq m\log_{10}2 < mb$$

を得ますから，さっきの②を考えて，もし

$$k \leqq ma \text{ かつ } mb \leqq k+1$$

となる自然数 k があれば $k+1$ 桁に確定，となります。つまり

$$mb-1 \leqq k \leqq ma$$

すなわち

$$\boldsymbol{mb \leqq k+1 \leqq ma+1} \quad \cdots\cdots ③$$

が成立すれば $k+1$ 桁となります。

さて，

$\log_{10}2 \fallingdotseq 0.3010$ とは $0.30095 \leqq \log_{10}2 < 0.30105$ ということですから（四捨五入したと考えた），$a=0.30095$，$b=0.30105$ とおきましょう。③に代入して，

$$\boldsymbol{0.30105m \leqq k+1 \leqq 0.30095m+1}$$

であれば $k+1$ 桁に確定です。あとは m に具体的な値を入れて，その式を満たす k があるかどうか確認すればよいのです。例えば $m=200$ とすると

$$60.21 \leqq k+1 \leqq 61.19$$

で，k は定まります。だからこのときは桁数は正確に求まります。しかし $m=1000$ とすると

$$301.05 \leqq k+1 \leqq 301.95$$

となって k がありません。つまり 1000 乗の時は正しい桁が計算できるかどうか不明，ということになります。でももっと精度を上げれば，例えば

$$0.30102 \leqq \log_{10}2 < 0.30103$$

がわかれば同様の計算で

$$301.03 \leqq k+1 \leqq 302.02$$

で k は見つかります。念のため。

§3. まとめ

まとめておきましょう。

> **$\log_{10}2=0.3010$ を用いて 2^m の桁数を求めるとき，**
>
> $$\boldsymbol{0.30105m \leqq k+1 \leqq 0.30095m+1}$$
>
> **となる k が存在すれば安全である。このとき，桁数は $k+1$。**

そもそも，近似値で計算するのと真の値で計算するのとで結果に違いが出るのはどういうときでしょうか。結局，

$$[m\log_{10}2] \neq [0.3010m] \quad \cdots\cdots ④$$

のときですね([　]はガウス記号)。パソコンで調べることができます。実際に見てみると，$m=1$ から $m=1000$ までの範囲で④が成立，すなわち 0.3010 を使う問題で指数にできないのは

$$m=196,\ 299,\ 392,\ 495,\ 588,\ 598,\ 681,\ 691,\ 784,\ 794,\ 877,\ 887,\ 897,\ 980,\ 990$$

でした。実際，例えば 196 乗のときは

$$\log_{10}2^{196}=196\log_{10}2=196\times0.3010=58.996$$

ですが，真の値は $196\log_{10}2=59.0018\cdots\cdots$ となるので桁数に狂いが生じます。

しかし，私たちが試験を作るときは大抵 30 乗，50 乗，100 乗など半端でない指数を使うので心配はなさそうです。ご安心ください！

(埼玉県立朝霞高等学校・朝霞西高等学校)