間違えやすい因数分解とその数の組について

長尾(ながお)　航(わたる)

§1. はじめに

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$
$$x^2-5x-6=(x+1)(x-6)$$

上に挙げた2つの因数分解は生徒のうっかりミスが多い因数分解の1つではないだろうか。

$$x^2-13x+30=(x-3)(x-10)$$
$$x^2-13x-30=(x+2)(x-15)$$

と，他にも例があり，

$$x^2-10x+24=(x-4)(x-6)$$
$$x^2-10x-24=(x+2)(x-12)$$

などの例を定数倍したものもある。

この話題が他校某氏とのやりとりから生まれ，その一般解について記述することができた。生徒の探究活動や諸兄の何らかの足しになってくれることを望む。

§2. 一般化

正の整数 a，b，p，q，r，s を用いて，

$$x^2-ax+b=(x-p)(x-q)$$
$$x^2-ax-b=(x+r)(x-s)$$

と因数分解されたとする。このとき，$r<s$ を満たす。係数比較から，

$$p+q=s-r \quad \cdots\cdots①$$
$$pq=rs \quad \cdots\cdots②$$

が成立する。

ここで，p，q，r，s の最大公約数を c とするとき，$p=cp'$，$q=cq'$，$r=cr'$，$s=cs'$ と正の整数 p'，q'，r'，s' を用いて表せるので，①，②より，

$$p+q=s-r \Longrightarrow cp'+cq'=cs'-cr'$$
$$\Longrightarrow p'+q'=s'-r'$$
$$pq=rs \Longrightarrow c^2p'q'=c^2r's' \Longrightarrow p'q'=r's'$$

が成立するので，p'，q'，r'，s' も題意を満たす数の組となるから，この後，p，q，r，s は互いに素であるとして証明を続ける。

(つまり，$(a,\ b)$が解 $\Longrightarrow$ $(na,\ n^2b)$も解)

さらに，②より，$\dfrac{p}{r}=\dfrac{s}{q}=k$ とおくと，

$p=rk$，$s=qk$ とでき，①に代入して，

$rk+q=qk-r$ より，$k=\dfrac{q+r}{q-r}$

$k>0$ なので，$q-r>0$ が成立し，

$k=1+\dfrac{2r}{q-r}$ なので，$k>1$ も成立する。

したがって，$p=rk>r$ であることがわかる。

§3. r を用いて p，q，s を記述する

$p=r+z$ とおける。(z は整数で $z\geqq 1$)

$k=\dfrac{p}{r}=\dfrac{r+z}{r}$ なので，$s=\dfrac{q(r+z)}{r}$

また，$p+q=s-r$ より，$q=s-2r-z$

したがって，$q=\dfrac{q(r+z)}{r}-2r-z$

$$\Longleftrightarrow q=r+\frac{2r^2}{z} \quad \cdots\cdots(*)$$

ゆえに，q，z が整数，$z\geqq 1$ であることから，z は $2r^2$ の約数でなければならない。

(i)　z が偶数のとき

$z=2z'$ と正の整数 z' を用いて表せて，$(*)$より，z' が r^2 の約数を含むので，正の整数 t を用いて，$r^2=z't$ とおける。

ここで，z' と t の公約数を d とすると，r^2 が d^2 で割り切れることになり，d は r の約数でもある。このとき，$p=r+2z'$，$q=r+t$，$s=3r+2z'+t$ となり，p，q，r，s は共通因数 d をもつ。§2から，$d=1$ である。ゆえに，z' と t は互いに素であるから，互いに素な2数 x，y を用いて，$r=xy$，$z'=x^2$，$t=y^2$ とおいてよい。

z が偶数だから，y は奇数である。よって，r を y を奇数，x と y が互いに素となるような $r=xy$ として，$p=xy+2x^2$，$q=xy+y^2$，$r=xy$，$s=2x^2+3xy+y^2$ と表せる。

(ii)　z が奇数のとき

(＊)より，z は r^2 の約数を含むので，(i)と同様の議論から，$r^2=zu$ とでき，$p=r+z$，$q=r+2u$，$s=3r+z+2u$ であるので，同様の議論から，z と u は互いに素になって，互いに素な 2 数 x，y を用いて，$r=xy$，$z=x^2$，$u=y^2$ とおいてよい。

z が奇数だから，x も奇数になる。よって，r を x を奇数，x と y が互いに素となるような $r=xy$ としたとき，$p=xy+x^2$，$q=xy+2y^2$，$r=xy$，$s=x^2+3xy+2y^2$ と表せる。

以上(i)(ii)から，結果の対称性により，任意の正の整数 r に対して，互いに素な 2 数 x，y を用いて，$r=xy$ とするとき，

r が偶数ならば，x を偶数として，

$$\begin{cases} p=xy+2x^2 \\ q=xy+y^2 \\ r=xy \\ s=2x^2+3xy+y^2 \end{cases}$$

r が奇数ならば，$x\leqq y$ として，

$$\begin{cases} p=xy+2x^2 \\ q=xy+y^2 \\ r=xy \\ s=2x^2+3xy+y^2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} p=xy+x^2 \\ q=xy+2y^2 \\ r=xy \\ s=x^2+3xy+2y^2 \end{cases}$$

と表せる。(証明終)

§4. 具体例と研究

$r=1$ から順に列挙していく。

$$\begin{cases} x^2-5x+6=(x-2)(x-3) \\ x^2-5x-6=(x+1)(x-6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-13x+30=(x-3)(x-10) \\ x^2-13x-30=(x+2)(x-15) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-17x+60=(x-5)(x-12) \\ x^2-17x-60=(x+3)(x-20) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-25x+84=(x-4)(x-21) \\ x^2-25x-84=(x+3)(x-28) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-41x+180=(x-5)(x-36) \\ x^2-41x-180=(x+4)(x-45) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-37x+210=(x-7)(x-30) \\ x^2-37x-210=(x+5)(x-42) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-61x+330=(x-6)(x-55) \\ x^2-61x-330=(x+5)(x-66) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-29x+210=(x-14)(x-15) \\ x^2-29x-210=(x+6)(x-35) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-85x+546=(x-7)(x-78) \\ x^2-85x-546=(x+6)(x-91) \end{cases}$$

……と各 r の値に対して $x=1$，$y=r$ が必ず存在するので，互いに素な$(p,\ q,\ r,\ s)$が少なくとも 1 つは見つかる。

系：任意の正の整数 r について，

$$x^2-(2r^2+2r+1)x+r(r+1)(2r+1)$$
$$=(x-(r+1))(x-r(2r+1))$$
$$x^2-(2r^2+2r+1)x-r(r+1)(2r+1)$$
$$=(x+r)(x-(r+1)(2r+1))$$

また，b が 6 の倍数であることや，「$2x^2$」「y^2」から見えるペル方程式の一端など，興味は尽きない。

紛らわしい因数分解を生徒に課すことは，同時に私たちがそうした問題をどのように捉えているかを問われているのだと感じ入る問題となった。

(東京都　関東第一高等学校)