高校数学で扱えるフラクタルの例

なかしま　ひろと
中島　熙人

§1. はじめに

フラクタルとは,「ある部分だけ切り出しても，全体と相似であるような構造をもつ図形」の総称である。これは1975年にブノワ・マンデルブロによって考案された比較的新しい概念であり，数学的に厳密な定義はいまだに整備されていない。

しかし，フラクタル図形には，次元が整数値とならないことなどの興味深い性質があることが知られている。また，自然界には海岸線からオウムガイの貝殻に至るまで，フラクタル構造を持つとみなせるものが多く存在している。画像処理やCGなど，工学分野への応用も研究されている。

このように，フラクタルは概念こそ新しいものの，数学内外の様々な分野での研究が進んでおり，生徒たちが将来どこかで目にする機会は少なくないと思われる。そのため，機会を捉えて紹介する価値は大いにある。そこで，本稿では，高校数学の範囲内で比較的平易に扱うことができ，尚且つ生徒の興味を引きそうな性質を備えたフラクタルの例を2つ紹介する。

§2. 正多角形のフラクタルの縮小係数

フラクタル図形は，基本となる図形を縮小して元の図形と組み合わせるという過程を無限に繰り返すことを前提としている。そのため，無限という概念に触れる機会の多い数学Ⅲの「極限」の単元は，フラクタルを紹介する好機である。コッホ雪片の周の長さと面積の極限を求める問題などは広く知られているが，立式の際に三角比などの既習事項を応用することが求められるため，ここではより平易な例題を扱う。

以下の問題は，筆者が,「極限」の単元を扱った際の定期考査で実際に出題した問題である。

問題

1辺の長さが1である正方形の各頂点に，その正方形を相似比 $1:a$ $(0<a<1)$ で縮小した正方形を繋ぎ，それらの正方形の残った3つの頂点に同じ相似比 $1:a$ で更に縮小した正方形を繋ぐ。これを繰り返し，図1のように次々と細かく枝分かれさせていったとき，枝分かれした先が，重なり合うことも，枝と枝の間に隙間ができることもなく，丁度接するような a の値を考える。次の問いに答えよ。

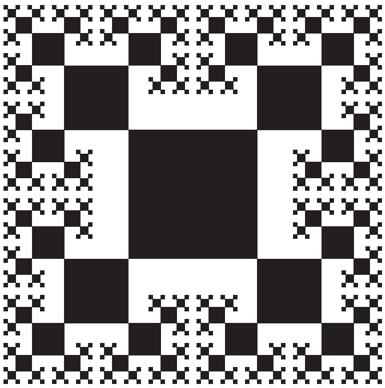


図1

(1)　1番目の正方形の下に伸びる2本の枝の先だけを考え，図2のように点A，B，C，Dをおき，線分CDの中点をMとする。ただし，2本の枝の先が丁度接する点はMと一致している。このとき，線分CMの長さを a を用いて表せ。

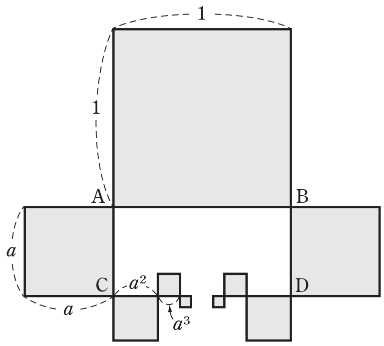


図2

解　CM の長さは初項 a^2，公比 a の無限等比級数であるから，

$$\mathrm{CM}=a^2+a^3+a^4+\cdots\cdots$$

$a\fallingdotseq 0$，$|a|<1$ より　　$\mathrm{CM}=\dfrac{a^2}{1-a}$ //

(2)　枝の先が丁度接するとき，$\mathrm{CM}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}$ となることを利用し，a の値を求めよ。

解　$\mathrm{CM}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}$ に，(1)の結果と $\mathrm{AB}=1$ を代入すると

$$\frac{a^2}{1-a}=\frac{1}{2}\cdot 1$$

両辺に $1-a$ を掛けて　　$2a^2=1-a$

これを解くと　　$a=\dfrac{1}{2}$，-1

$0<a<1$ より　　$a=\dfrac{1}{2}$ //

このクラスの授業では授業でフラクタル図形を扱ったことがなかったため，丁寧に誘導を設けて出題した。それもあってか，正答率はこちらでおおまかに想定していたよりも高かった。このときは，解説の際にフラクタルという言葉の説明と，応用例などに関して触れることができた。

また，今回は正方形のフラクタルを考えたが，正三角形の場合を同様に考えると図 3 のようになる。この場合，枝先が丁度接する縮小係数は，黄金比 $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ の逆数，すなわち ϕ^{-1} となる。

図3

また，正五角形のフラクタルで同様に考えると，縮小係数は ϕ^{-2} となる。授業ではフィボナッチ数列の一般項の極限が ϕ となることにも触れていたため，そのこととも関連付けて紹介した。

このように，正多角形のフラクタルの縮小係数の問題は，計算が比較的平易でありながら，状況に合わせ，内容に広がりを持たせて扱うことができる。

§3．ワイエルシュトラス関数

関数の連続性と微分可能性は，しばしば生徒が混同してしまうことのある概念である。そこで，教科書などでは関数 $f(x)=|x|$ のグラフを描き，この関数が $x=0$ で連続であるが微分可能ではないことを示し，違いを直感的に理解させる説明がよく用いられる。

ここで，余談として「このような連続であるが微分不可能な点は，幾つまで増やすことができるか」という問いかけをしてみると，生徒の意見は割れる。数学Ⅰで既習の $y=|x^2-1|$ のグラフなどが思い浮かべば，そのような点を 1 点から 2 点に増やすことが簡単であることはすぐにわかる。では，3 点，4 点，……と増やしていき，そのような点を無限に多くもつ関数は存在するのか，と投げかける。すると生徒は，極限の計算で，無限大に発散するようなものを扱う場合には直感が通用しないような例を幾つも見ているため，安易に肯定することはできない。

このような前置きを話してから，改めて「連続であるが微分不可能な点は無限に増やすことができるか」と問うと，生徒は答えに詰まることが多い。そこで，次の「ワイエルシュトラス関数」を紹介できる。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a^n\cos(b^n x\pi)$$

$$\left(\text{ただし } 0<a<1,\ b \text{ は奇整数，} ab>1+\frac{3}{2}\pi\right)$$

この関数は，連続かつ至るところ微分不可能な関数の例として，カール・ワイエルシュトラスが 1872 年に紹介したものである。その性質を証明しようとすると，多くの高校生にとっては複雑な計算を行わなければならない。しかし，グラフ描画ソフトを用いて，この関数のグラフの成り立ちを説明することはできる。そして，フラクタルとしての性質もそこに関係してくる。

図 4 は，上の定義式において $a=\dfrac{8}{9}$，$b=7$ とし，n の上限を 2，3，……と変化させたグラフである。n の上限が大きくなるにしたがって，曲線の各所に極値が現れ，それが繰り返されていく様子がわかる。

また，各々の極値のところでグラフが先鋭になっていくのもわかる。このようにして，$n \to \infty$ としたとき，このグラフには無限に多くの微分不可能な点があることを想像することができる。

ここで，ワイエルシュトラス関数のグラフがフラクタル構造を備えていることに注目させたい。実際，図 4 で $n=4$ や 5 のときのグラフの一部を拡大すれば，全体と同じような形の曲線が現れる。むしろ，フラクタル構造を備えることによって，連続性を保ったまま，無限に多くの微分不可能な点を存在させることができている，という点を補足できる。

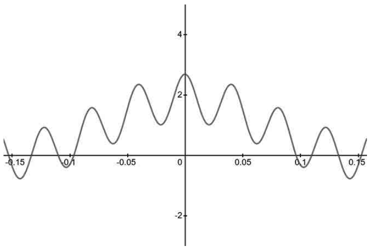
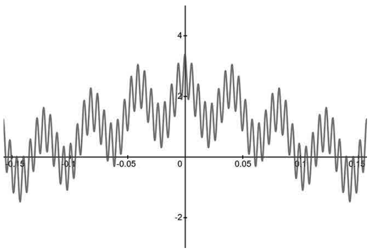
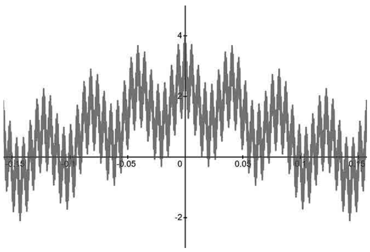
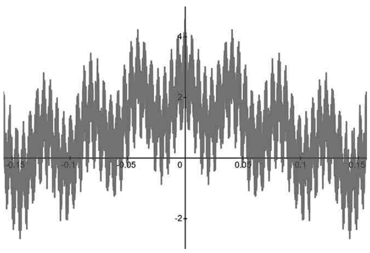
n の上限	グラフ
2	
3	
4	
5	

図 4

§4. おわりに

この題材を授業で扱おうと思ったのは，筆者が高校生のときに参考文献〔1〕を読み，正三角形や正五角形のフラクタルと，黄金比の関係が印象に残っていたのがきっかけである。その後も，数学の内外を問わず様々なところにフラクタルという言葉が現れるのを見て，興味を引かれたのを記憶している。生徒にとってもそのようなきっかけとなる授業の題材を，引き続き研究したい。

《参考文献》

〔1〕 アルプレヒト・ボイテルスパッヒャー，ベルンハルト・ペトリ『黄金分割―自然と数理と芸術と―』共立出版，2005

〔2〕 高安秀樹『フラクタル　新装版』朝倉書店，2010

〔3〕 日本数学会編『岩波　数学辞典　第 4 版』岩波書店，2007

（東京都　田園調布学園中等部・高等部）