連続関数で定義される漸化式の極限

才野瀬（さいのせ）　一郎（いちろう）

§1. 主題と問題

【主題】　本稿では次の前提

(A)：「関数 $f(x)$ は，閉区間 $a \leqq x \leqq b$ において連続で，$a \leqq f(x) \leqq b$ を満たす。」

を設ける。その上で，漸化式

$$a \leqq a_1 \leqq b,\ a_{n+1}=f(a_n)$$

により数列 $\{a_n\}$ を定めると，

$$a \leqq a_n \leqq b\ (n \geqq 1)$$

となる。以下，数列の極限に関する条件

(E)：「ただ1つの実数 $c\,(a \leqq c \leqq b)$ が存在し，初項 a_1 の値にかかわらず，数列 $\{a_n\}$ が c に収束する。」

が成り立つための十分条件を考えよう。

例えば，次の【問題】においては，(2)の仮定「$p>q$」が(E)の十分条件を与える。

【問題】　東京大 2014(前期)理系4番　改題

$0<p<1,\ q>0$ とする。

関数 $f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$ を用いて，漸化式

$$0 \leqq a_1 \leqq 1,\ a_{n+1}=f(a_n)$$

により数列 $\{a_n\}$ を定めるとき，次を示せ。

(1)　$0 \leqq x \leqq 1 \Longrightarrow 0 \leqq f(x)<1$

(2)　$p>q \Longrightarrow$ 数列 $\{a_n\}$ は0に収束する。

(3)　$p<q \Longrightarrow$「$c=f(c),\ 0<c<1$ を満たす実数 c がただ1つ存在する。」

(追加)

(4)　$p \geqq q\ (f'(0) \leqq 1) \Longrightarrow$ (E)が成立

(5)　$p<q\ (f'(0)>1) \Longrightarrow$ (E)は不成立

実際，(ア)　$a_1=0 \Longrightarrow a_n \longrightarrow 0$

(イ)　$a_1 \neq 0 \Longrightarrow a_n \longrightarrow c\ (>0)$

問題において(1)から(2)の流れは自然であるが，その後の(3)で突然に入試問題が終了することに違和感を感じないだろうか。

出題者の意図には続きに(4)(5)があると推測し，追加している。条件(E)の成否には，不動点0における微分係数が影響している。

§2. 極限に関する一般論

(E)の一般的な十分条件として，高校数学で現れる定理1と，大学数学を用いた定理2を掲げる。まず，主題について注意をする。

【補題】　主題に関する注意

(0)　関数 $F(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ において連続で，$F(a) \leqq 0,\ F(b) \geqq 0$ ならば，

$$F(c)=0,\ a \leqq c \leqq b$$

を満たす実数 c が存在する。

さらに，$F(x)$ が単調増加(例えば $a<x<b$ で $F'(x)>0$)ならば，c はただ1つに決まる。

以下，主題の $f(x)$ に対して $F(x)=x-f(x)$ とおく。

(1)　$\underline{f(c)=c} \Longleftrightarrow F(c)=0$

このとき，c を $f(x)$ の不動点と呼ぶ。

(2)　$a \leqq e<b$ とする。

もし，$f(e) \geqq e$ ならば，$e \leqq x \leqq b$ において $f(x)$ の不動点が存在する。(特に，$e=a$ の場合は条件(A)により常に成立している)

さらに，$f'(x)<1\ (e<x<b)$ ならば，$e \leqq x \leqq b$ において不動点はただ1つである。

(3)　(ア)　$a_n \longrightarrow c$ (極限値) $\Longrightarrow c$ は不動点

(イ)　c が不動点のとき，$a_1=c \Longrightarrow a_n \longrightarrow c$

(4)　実数 c と x が $|f(x)-c| \neq |x-c|$ を満たすならば，x は不動点になり得ない。

(5)　常に $f''(x)<0$ で，c が不動点のとき，

$$s<t,\ s \neq c,\ t \neq c \Longrightarrow \frac{f(s)-c}{s-c}>\frac{f(t)-c}{t-c}$$

証明　(0)　中間値の定理による。

(2)　注意(0)による。実際，$F(x)$ は連続で，
$F(e)=e-f(e)\leqq 0$，$F(b)=b-f(b)\geqq 0$ から存在がわかり，$F'(x)=1-f'(x)>0$ $(e<x<b)$ から一意性がわかる。

(3)　(ア)　$a_n \longrightarrow c$ $(n\longrightarrow\infty)$ ならば，$a_{n+1}\longrightarrow c$ であり，$a_{n+1}=f(a_n)$ において $f(x)$ の連続性に注意すると，$c=f(c)$ である。

(イ)　$a_1=c$ ならば帰納的に $a_n=f(a_{n-1})=c$ $(n\geqq 2)$ となり，$a_n\longrightarrow c$ を得る。

(4)　対偶を考えると明らか。

(5)　$c=f(c)$ と参考文献〔2〕(2)による。

【定理1】　縮小写像の利用

(1)　$a\leqq c\leqq b$，$0\leqq M<1$ とする。$f(x)$ が，常に $|f(x)-c|\leqq M|x-c|$ を満たすならば，(E)が成立。

(2)　$f(x)$ について，前提(A)と条件

(B)：「$a\leqq x\leqq b$ において導関数 $f'(x)$ が連続で，
$|f'(x)|<1$ を満たす。」

を仮定すると，(E)が成立。

証明　(1)　仮定により

$$|a_{n+1}-c|=|f(a_n)-c|\leqq M|a_n-c|$$

すると帰納的に

$$0\leqq|a_n-c|\leqq M^{n-1}|a_1-c|\quad(n\geqq 1)$$

ここで $0\leqq M<1$ より

$n\longrightarrow\infty$ のとき　$M^{n-1}|a_1-c|\longrightarrow 0$

はさみうちの原理によれば $|a_n-c|\longrightarrow 0$ となり，$a_n\longrightarrow c$ を得る。

(2)　補題(2)より，$f(x)$ はただ1つの不動点 c をもつ。さらに，$|f'(x)|$ が閉区間で連続だから，その最大値 M $(0\leqq M<1)$ が存在する。

すると，平均値の定理により，$x\neq c$ のとき

$$|f(x)-c|=|f(x)-f(c)|$$
$$=|f'(d)||x-c| \qquad \cdots\cdots ①$$

となる実数 d が x と c の間に存在する。

M の最大性によれば　$|f(x)-c|\leqq M|x-c|$

これは，$x=c$ のときも成り立つ。

すると，(1)により(E)が成立。

【定理2】　主定理

(1)　$a\leqq c\leqq b$ とする。$f(x)$ が(A)と条件

(C)：$x\neq c \Longrightarrow |f(x)-c|<|x-c|$

を満たすとき，c がただ1つの不動点となり，(E)が成立。

(2)　$a<c\leqq b$ とする。$f(x)$ が(A)と

(C′)：$x\neq a$，$c \Longrightarrow |f(x)-c|<|x-c|$

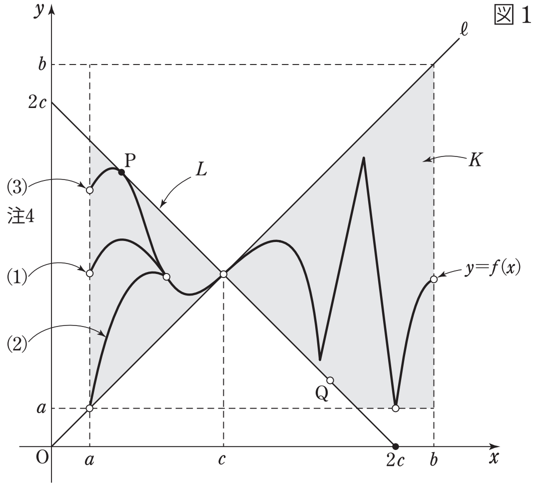
(D)：$f(a)=a$（a が不動点）

の3条件をすべて満たすとき，

(i)　$a_N=a$ となる項 a_N がある場合は
$a_n\longrightarrow a$ $(n\longrightarrow\infty)$ が成立。

(ii)　逆に，$a_n\neq a$ $(n\geqq 1)$ の場合は
$a_n\longrightarrow c$ $(n\longrightarrow\infty)$ が成立。

図1



（注1）　条件(C)は，$x\neq c$ のときにグラフ上の点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ が図1の網目部分の領域 K に属することを意味する。ただし，境界である直線 ℓ：$y=x$ および直線 L：$y=2c-x$ 上を除く。

（注2）　$f(x)$ が(A)と条件

$$-1<f'(x)<1\quad(a<x<b)$$

を満たすならば，(E)が成立。

（注3）　(2)において，さらに
$f(x)>a$ $(x>a)$ ……① を仮定すると
「$a_1\neq a \Longrightarrow a_n\longrightarrow c$」が成立。

証明　まず，$f(x)$ が(A)と(C′)を満たすとき

「常に $|f(x)-c|\leqq|x-c|$」 ……②

となり，c は $f(x)$ の不動点である。

実際，$a\leqq x\leqq b$，$t\neq x$，a，c のとき，(C′)より
$|f(t)-c|\leqq|t-c|$

ここで $t\longrightarrow x$ とすると，$f(x)$ の連続性により
$|f(x)-c|\leqq|x-c|$ が成立。

特に，$x=c$ のときは $|f(c)-c|\leqq 0$ となり
$f(c)=c$ を得る。

(2)(i)の場合は，(D)から帰納的に $a_n=a$ $(n\geqq N)$ となり，$a_n\longrightarrow a$ を得る。

以下，(1)と(2)(ii)を同時に示そう。
そのためには，次の3条件

(α) $a\leqq c$

(β) $f(x)$ が前提(A)と(C′)を満たす。

(γ) $x=a$ では，次を満たす。

「$|f(a)-c|<|a-c|$」または

「$f(a)=a$ かつ $a_n\neq a$ $(n\geqq 1)$」

を仮定して $a_n\longrightarrow c$ を示せば十分。

さて，(C′)と補題(2)(4)から $f(x)$ の不動点が存在し，a または c（両方も可）である。

ここで，$x=a_n$ として②を使うと，

$$0\leqq|a_{n+1}-c|=|f(a_n)-c|\leqq|a_n-c| \quad \cdots\cdots③$$

これから，$|a_n-c|$ は下に有界な広義の単調減少列となるから，ある実数 e に収束すること（参考文献〔2〕(1)）がわかる。

すなわち，$|a_n-c|\longrightarrow e\geqq 0$ $(n\longrightarrow\infty)$
ここで，「$a_n\longrightarrow c \iff \underline{e=0}$」に注意。

いま，a_n-c，$a_{n+1}-c$ の符号（0より大きいか0以下か）の変化については，次の(ア)(イ)の場合が考えられる。

(ア)：符号の変化が無限回現れる。

このとき，$\{a_n\}$ の無限部分列 $\{a_{n(j)}\}$ が存在し，

$$a_{n(j)}-c>0,\ a_{n(j)+1}-c\leqq 0$$

が成り立つ。

すると $j\longrightarrow\infty$ のとき

$$a_{n(j)}-c=|a_{n(j)}-c|\longrightarrow e$$
$$a_{n(j)+1}-c=-|a_{n(j)+1}-c|\longrightarrow -e$$

より，

$$a_{n(j)}\longrightarrow c+e,\ a_{n(j)+1}\longrightarrow c-e$$

さらに，$a_{n(j)+1}=f(a_{n(j)})$ において $j\longrightarrow\infty$ とすると，$f(x)$ の連続性から $c-e=f(c+e)$ となる。
よって $|f(c+e)-c|=|(c+e)-c|$
(C′)によれば，$c+e=a$ または $c+e=c$ であるが，前者の場合にも $a=c+e\geqq c\geqq a$ により後者 $c+e=c$ $(\iff e=0)$ が成立。

(イ)：符号の変化が高々有限回である。

このときは，十分大きな自然数Nを選ぶと次の(ウ)(エ)のどちらか一方が成り立つ。

(ウ) $a_n-c\leqq 0$ $(n\geqq N)$

(エ) $a_n-c>0$ $(n\geqq N)$

(ウ)の場合：

$$n\geqq N \Longrightarrow a_n-c=-|a_n-c|\longrightarrow -e$$

より，$a_n\longrightarrow c-e$（収束）となる。
補題(3)によれば，極限値 $c-e$ は不動点 a または c に等しい。
③より，$0\geqq a_{n+1}-c\geqq a_n-c$ $(n\geqq N)$ だから

$$c\geqq a_{n+1}\geqq a_n\geqq a_N\geqq a \quad (n\geqq N)$$

ここで $a_N>a$ としてよい。実際，$a_N=a$ のときは(γ)から $|f(a)-c|<|a-c|$ となり，$f(a)\neq a$ が従う。すると $a_{N+1}=f(a_N)=f(a)\neq a$ となるので，a_N を a_{N+1} に取り替えればよい。

すると，$a_n\geqq a_N>a$ $(n\geqq N)$ となり，a_n の極限値は a にはなり得ず c である。

(エ)の場合：

同様にして，$a_n\longrightarrow c+e$（収束）である。

ここで，$c+e\geqq c\geqq a$ により，極限値（不動点）について $c+e=c$ を得る。

最後に，（注1）は容易。

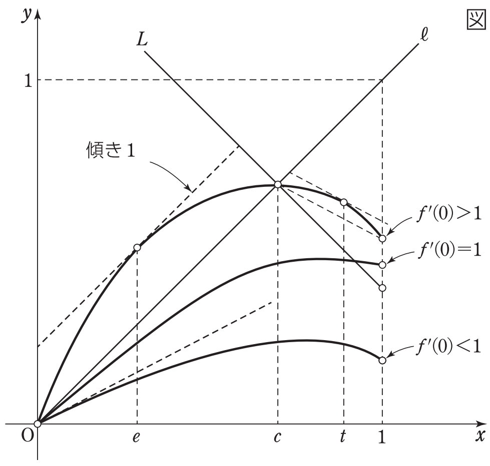
（注2）定理1(2)証明中の①式において，$|f'(d)|<1$（∵仮定）より(C)を満たす。(1)によれば(E)が成立。

（注3）追加の仮定①より帰納的に $a_n>a$ $(n\geqq 1)$ となるので，(2)(ii)による。

§3. 問題の解答

以上の定理を利用して，問題を解こう。
ただし，(3)までは定理2を用いない。

図2



$0 \leqq x \leqq 1$ とする。

(1) $f(x)$ の式は $1-p$ と $1-e^{-qx}$ を $(1-x):x$ に分けることを表す。

$0<p<1,\ 0<e^{-qx} \leqq 1$ ……⓪

より $0<1-p<1,\ 0 \leqq 1-e^{-qx}<1$ に注意すると $0 \leqq f(x)<1$ がわかる。

さらに，$f(x)$ は連続だから前提(A)を満たす。

(2) $f(0)=0$ (0 は不動点)に注意。

$f'(x)=-p+e^{-qx}(1+q-qx)$

$f''(x)=-qe^{-qx}\{2+q(1-x)\}<0$

が簡単な計算でわかる。後者から，

$\begin{cases} f'(x) \text{ は単調減少かつ連続} \\ y=f(x) \text{ のグラフは上に凸} \end{cases}$ ……①

また，$f'(1)=-p+e^{-q}$ と⓪より

$-1<f'(1)<1$ ……②

$f'(0)=1-p+q$ ……③

$0<f(1)=1-p<1$ ……④

ここで，$p>q$ および①②③により，

$1>f'(0) \geqq f'(x) \geqq f'(1)>-1$

すると，定理 1 (2)(B)を満たして(E)が成立する。

補題(2)(3)によれば，その極限値 c はただ 1 つの不動点 0 である。

(3) 仮定 $p<q$ より $f'(0)>1$

さらに $f'(1)<1$ (②) と①により，$f'(e)=1$, $0<e<1$ となる e がただ 1 つ存在する。

このとき，次の⑤が成立。

区間 $0<x \leqq e$ において $f(x)>x$ ……⑤

実際，平均値の定理により

$f(x)=f(x)-f(0)=f'(t)x$ ……⑥

かつ $0<t<e$ となる t が存在するが，

$f'(t)>f'(e)=1$ ($\because$ ①) より，⑤を得る。

よって，この区間に不動点はない。

他方，$f(e)>e$ かつ，$e<x \leqq 1$ において $f'(x)<f'(e)=1$ より，補題(2)から $e \leqq x \leqq 1$ にただ 1 つの不動点 c をもつ。

ここで $f(1)<1$ (④) より，c は $0<x<1$ におけるただ 1 つの不動点である。

(注意) (3)では，0 と c が不動点だから

・$a_1=0 \Longrightarrow a_n \longrightarrow 0$

・$a_1=c \Longrightarrow a_n \longrightarrow c\ (>0)$

($\because$ 補題(3)(ア)) となり，(E)は不成立。

問題(3)はこのための布石と思われる。

(4) 仮定と①②③から，$0<x<1$ において $1 \geqq f'(0)>f'(x)>f'(1)>-1$ となる。

定理 2 (注 2) によれば(E)が成立。

(5) (ア)は明らか。

(イ)に関して，$f(0)=0$ から定理 2 (2)(D)が成り立つので，(C′)と(注 3)①を示せば良い。

実際，補題(5)より，$0<x \leqq 1,\ x \neq c$ のとき

$1=\dfrac{f(0)-c}{0-c}>\dfrac{f(x)-c}{x-c} \geqq \dfrac{f(1)-c}{1-c}$

さらに，平均値の定理と①②より，

$c<t<1$ かつ $\dfrac{f(1)-c}{1-c}=f'(t)>f'(1)>-1$

となる t が存在するから，(C′)を満たす。

①の「$f(x)>0\ (x>0)$」については，

$0<x \leqq e$ のときは⑤から $f(x)>0$

$e<x \leqq 1$ のときは⑤から $f(e)>0$，および④と上に凸(①)より $f(x) \geqq \min\{f(e),\ f(1)\}>0$

§4. おわりに

高校数学で(E)の十分条件を一般的に与える方法は定理 1 以外に考えづらい。したがって，$f'(x) \geqq 1$ となる x が存在する【問題】では(3)で終了せざるを得なかったと思われる。しかし，このような場合でも定理 2 を使って極限を詳しく調べることができる。

なお，次の(注 4)のように，定理 2 (1)において条件(C)を$(\overline{\mathrm{C}})$に弱め，(2)において(C′)を$(\overline{\mathrm{C}'})$に弱めても，他の条件が同じであれば同じ議論により同じ結論を得ることがわかる。

(注 4) $a \leqq x \leqq b$ となる実数 x に対して，条件 $\lambda(x)$ と $\mu(x)$ を

$\lambda(x):|f(x)-c|<|x-c|$

$\mu(x):f(x)=2c-x$ かつ $f(2c-x) \neq x$

とし，

$(\overline{\mathrm{C}}):x \neq c \Longrightarrow \lambda(x)$ または $\mu(x)$

$(\overline{\mathrm{C}'}):x \neq a,\ c \Longrightarrow \lambda(x)$ または $\mu(x)$

と定める。

ここで，$\mu(x)$ の意味は次の通り。

グラフ上の点 $\mathrm{P}(x,\ f(x))$ が領域 K の境界をなす直線 $L:y=2c-x$ 上にあることを許すが，この際には点 P の直線 $\ell:y=x$ に関する対称点 Q が L 上にないことを要請する。(定理 2 図 1 の(3))

(編集部注：解答は，筆者が独自に作成したものです。)

《参考文献》

〔１〕 入試問題集　数学Ⅲ　2014　数研出版　P38
問題100番
〔２〕 改訂版チャート式　数学Ⅲ(赤チャート)
数研出版
⑴　P215　LECTURE　単調有界な数列の極限
⑵　P346　Column　凸関数とその性質

(広島県　広島市立基町高等学校)