問題の背景を理解するアクティブラーニング
～入試問題を題材にとって～

西元（にしもと）　教善（のりよし）

§1. はじめに

高３生の数学の授業では大学入試の過去問を解かせる問題演習の時間がある。問題を生徒に指名し，解かせ，板書させ，それを教員が解説しながら添削や補足するスタイルが多いが，私は生徒に教壇に上がらせ，他の生徒に説明させる。

説明を受ける生徒には，わかりにくいところは説明する生徒が困るくらいに積極的に「突っ込む」ように，また説明する生徒にはそれに十分応えられるように準備をしておくことを指導している。また，その中で板書の仕方（＝解答の仕方）にも言及し，記述力の向上にも役立てる。

ただ，与えられた過去問を解くだけでなく，それを叩き台にして，数値だけでなく問う内容を改変したり，さらに拡張や一般化したりすれば，もっと教育的効果が望める。というのも，問題の背景にある数学的な内容や出題者の意図などに考えが及び，理解が深まるからである。また，生徒の手による「良問」を定期考査に出題することにすれば，生徒は俄然張り切って取り組み，一層の教育的効果がある。

本稿では，次のような問題を改変（範囲設定，係数設定，次数上昇）して，問題の背景を理解するアクティブラーニング的探究をさせた例を紹介する。

§2. 叩き台になった問題

叩き台になった問題は次のような$\boxed{\text{問題Ⅰ}}$である。
(類 04 愛知教育大)〔１〕

$\boxed{\text{問題Ⅰ}}$　(1)　$\displaystyle\int\frac{dx}{1-x^2}$ を求めよ。

(2)　$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき，$1+x^2\leqq\dfrac{1}{1-x^2}\leqq1+\dfrac{9}{8}x^2$ が成り立つことを示せ。

(3)　定積分を利用して，$\dfrac{56}{81}<\log2<\dfrac{25}{36}$ を示せ。

§3. 問題の背景を探究する

問題Ⅰは，一読すれば解決の流れがわかる。(1)は(2)で証明すべき不等式の中辺の不定積分であり，(2)は(3)で証明すべき不等式のヒントになっている。(2)で証明すべき不等式の各辺を０から $\dfrac{1}{3}$ まで定積分すれば(3)で証明すべき不等式が導かれる。つまり「定積分と不等式」で示せばよいわけである。(1)は不定積分であるが，この結果を定積分に使えば $\log2$ に関わる値が出るはずである。なお，(3)での「定積分を利用して」は入試問題としては不要であろうし，誘導する順番としては(2)，(1)，(3)の方がわかりやすいと思われる。

特に(2)，(3)において，単に証明できるだけでなく，なぜこのように証明できるのかそのメカニズムを考えることでより理解が深化する。

たとえば(2)において，なぜ「$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき」なのかということである。これについては(1)の結果である $\displaystyle\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$（$C$は積分定数）から，$\displaystyle\int_0^\alpha\frac{dx}{1-x^2}=\left[\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_0^\alpha=\frac{1}{2}\log\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ $(0<\alpha<1)$ であり，(3)において $\log2$ が出現するためには $\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}=2\iff\alpha=\dfrac{1}{3}$ である必要があるからである。

$\log3$ が出現するためには $\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}=3\iff\alpha=\dfrac{1}{2}$ であり，$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$1+x^2\leqq\dfrac{1}{1-x^2}\leqq1+cx^2$ を満たす定数 c $(c>1)$ を考える必要がある。

また，$\displaystyle\int\frac{dx}{1-x^2}$ において積分される関数の分母の次数２を３，４と上げることも考えられる。§4.ではこれらのことについて考察する。

§4. 問題をアレンジする〜アクティブラーニングのために〜

ア　$\dfrac{13}{12}<\log 3<\dfrac{10}{9}$ を証明する問題

§3.の考察より$\boxed{\text{問題Ⅰ}}$から次のような$\boxed{\text{問題Ⅱ}}$が考えられる。

$\boxed{\text{問題Ⅱ}}$ (1) $\displaystyle\int\frac{dx}{1-x^2}$ を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$1+x^2\leqq\dfrac{1}{1-x^2}\leqq 1+cx^2$ が成り立つ定数 c の最小値を求めよ。

(3) $\dfrac{13}{12}<\log 3<\dfrac{10}{9}$ を示せ。

(1)の結果 $\displaystyle\int\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$（$C$は積分定数）から $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}=\frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log 3$ である。また，$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$，$c>1$ のとき，次が成り立つ。

$$\frac{1}{1-x^2}\leqq 1+cx^2 \iff (1+cx^2)(1-x^2)\geqq 1$$
$$\iff cx^4\leqq(c-1)x^2 \iff x^2\leqq\frac{c-1}{c}$$
$$\iff 0\leqq x\leqq\sqrt{\frac{c-1}{c}}$$

よって，$\dfrac{1}{2}\leqq\sqrt{\dfrac{c-1}{c}}$ であれば，

「$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$，$c>1 \Longrightarrow \dfrac{1}{1-x^2}\leqq 1+cx^2$」が成り立つ。$\dfrac{1}{2}\leqq\sqrt{\dfrac{c-1}{c}} \iff \dfrac{1}{4}\leqq\dfrac{c-1}{c} \iff c\geqq\dfrac{4}{3}$ であるから，題意に適する定数 c の最小値は $\dfrac{4}{3}$ である。

よって，$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，

$1+x^2\leqq\dfrac{1}{1-x^2}\leqq 1+\dfrac{4}{3}x^2$ が成り立つ。これより，

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1+x^2)\,dx<\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{1-x^2}<\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{4}{3}x^2\right)dx$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}}(1+x^2)\,dx=\left[x+\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{24}=\frac{13}{24}$$
$$\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{4}{3}x^2\right)dx=\left[x+\frac{4x^3}{9}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{18}=\frac{10}{18}$$

であるから　$\dfrac{13}{24}<\dfrac{1}{2}\log 3<\dfrac{10}{18}$

よって，$\dfrac{13}{12}<\log 3<\dfrac{10}{9}$ である。

これは，叩き台になった$\boxed{\text{問題Ⅰ}}$の易化（数値的にみて）であるが，(2)の条件つき不等式を作らせる所は難化している。

イ　$\dfrac{92\sqrt{3}}{135}<\log(2+\sqrt{3})+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{41\sqrt{3}}{60}$ を証明する問題

$\displaystyle\int\frac{dx}{1-x^2}$ の場合は $\dfrac{1}{1-x^2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x}\right)$ と部分分数に分解して

$$\int\frac{dx}{1-x^2}=\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)dx=\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots=\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C\quad(C\text{は積分定数})$$

としたので，同様に $\dfrac{1}{1-x^3}$，$\dfrac{1}{1-x^4}$ の場合も部分分数に分解することを考えればよいとわかる。

ただし，$\dfrac{1}{1-x^4}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1-x^2}\right)$ より

$$\int\frac{dx}{1-x^4}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1-x^2}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2}\tan^{-1}x+\frac{1}{4}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C\quad(C\text{は積分定数})$$

となるのに対して，

$$\frac{1}{1-x^3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x+2}{1+x+x^2}\right)$$

である。さらに，

$$\int\frac{dx}{1-x^3}=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1-x}+\frac{x+2}{1+x+x^2}\right)dx$$
$$=-\frac{1}{3}\log|1-x|+\frac{1}{3}\int\frac{x+2}{1+x+x^2}\,dx$$

となる。

$\displaystyle\int\frac{x+2}{1+x+x^2}\,dx$ については，定積分を考えると次の変形が必要になり，いきなり複雑になる。

$$\frac{x+2}{1+x+x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{1+x+x^2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+x+x^2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)'+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)'+\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}^2+1}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)'+2\cdot\frac{1}{\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}^2+1}$$

よって，先に $\displaystyle\int\frac{dx}{1-x^4}$ から考えさせる。（本稿ではこれのみ）そこで，次のようにしてみる。

問題Ⅲ (1) $\int \frac{dx}{1-x^4}$ を求めよ。

(2) $0 \leqq x \leqq \alpha$ $(0<\alpha<1)$ のとき，

不等式 $1+x^4 \leqq \frac{1}{1-x^4} \leqq 1+\beta x^4$ $(\beta>1)$

が成り立つようにしたい。β を固定するとき，

α の最大値 a を β で表せ。

(3) a の値を適切に定め，$\frac{\pi}{3}+\log(2+\sqrt{3})$ のとり得る値の範囲を求めよ。

ここで，(3)の「a の値を適切に定める。」という文言がわかりにくいだろうが，$\int_0^a \frac{dx}{1+x^2}$ において

$x=\tan\theta$，$a=\tan\gamma$ $\left(0<\gamma<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$1+x^2=1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$，$\frac{dx}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\tan\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$

であることから $\int_0^\gamma \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^\gamma 1d\theta=\Big[\theta\Big]_0^\gamma=\gamma$ となるので，$\gamma=\frac{\pi}{6}$ となるように a の値を定めるということである。このとき，$a=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ であり

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{dx}{1-x^2}=\left[\frac{1}{2}\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right|=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$$

(2)について

$0 \leqq x \leqq \alpha$ $(0<\alpha<1)$ のとき $1-x^4>0$ であるから

$$1+x^4 \leqq \frac{1}{1-x^4} \iff (1+x^4)(1-x^4) \leqq 1$$

$$\iff 1-x^8 \leqq 1$$

であり，$1-x^8 \leqq 1$ は明らかに成り立つので

$1+x^4 \leqq \frac{1}{1-x^4}$ は成り立つ。

$0 \leqq x \leqq \alpha$ $(0<\alpha<1)$ のとき $1-x^4>0$ であるから

$$\frac{1}{1-x^4} \leqq 1+\beta x^2 \iff (1-x^4)(1+\beta x^4) \geqq 1$$

$$\iff \beta x^8-(\beta-1)x^4 \leqq 0 \iff x^4 \leqq \frac{\beta-1}{\beta}$$

$$\iff x \leqq \sqrt[4]{\frac{\beta-1}{\beta}}$$

よって，$\alpha \leqq \sqrt[4]{\frac{\beta-1}{\beta}}$ であれば $\frac{1}{1-x^4} \leqq 1+\beta x^2$ となるので，この不等式が成り立つ最大の α は

$\sqrt[4]{\frac{\beta-1}{\beta}}$ である。よって，$a=\sqrt[4]{\frac{\beta-1}{\beta}}$ である。

(3)について

$a=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ とおくと $\sqrt[4]{\frac{\beta-1}{\beta}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

つまり $\frac{\beta-1}{\beta}=\frac{1}{9}$ よって $\beta=\frac{9}{8}$

したがって，$0 \leqq x \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，

$1+x^4<\frac{1}{1-x^4}<1+\frac{9}{8}x^4$ が成り立つ。

これより

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(1+x^4)\,dx<\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dx}{1-x^4}<\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(1+\frac{9}{8}x^4\right)dx$$

であり，各辺を計算すると

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(1+x^4)\,dx=\left[x+\frac{x^5}{5}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9\sqrt{3}}=\frac{46\sqrt{3}}{135}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\frac{dx}{1-x^4}=\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})+\frac{\pi}{6}$$

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(1+\frac{9}{8}x^4\right)dx=\left[x+\frac{9}{40}x^5\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{9}{40}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{40\sqrt{3}}=\frac{41\sqrt{3}}{120}$$

よって $\frac{46\sqrt{3}}{135}<\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})+\frac{\pi}{6}<\frac{41\sqrt{3}}{120}$

したがって $\frac{92\sqrt{3}}{135}<\log(2+\sqrt{3})+\frac{\pi}{3}<\frac{41\sqrt{3}}{60}$

§5．まとめ～新テスト対応を視野に入れて～

新テストはセンター試験の後続テストであるが，その質問形式に変化がある。恐らく2次試験にもそれは波及するであろう。これまでのように「……を解け。」とか「……を証明せよ。」のように与えられたものの処理だけでなく，もっと揺らぎのある問題に対する判断力と思考力，その戦略を遂行する能力が問われることになるのではないかと推察される。

本稿で考察した**問題Ⅱ**の(2)(標準)や**問題Ⅲ**の(2)，(3)のような問題(やや難)を，進んだ生徒を中心にアクティブラーニングさせる意義はあると思う。

《引用文献》

〔1〕 改訂版 クリアー数学演習Ⅲ 受験編，㉘ 定積分と不等式，Example 28，p58，数研出版

(山口県立光高等学校)