問題作成の小さい工夫
～閉区間内で最大値または最小値の設定された２次関数の決定問題～

なかはら　かつよし
中原　克芳

§0. はじめに

数学を理解するには，自力で問題を解くことが大切です。そのため我々数学教師は，貴重な授業時間を割いて生徒に多くの問題を解かせています。しかし，生徒に授業の内容を理解させるためには，単に問題を与えるだけでは不十分で，授業内容に合った適切な条件や，計算が適度な難易度になるような数値等，様々なことに注意しなければなりません。特に今回取り上げる２次関数の問題では，単なる数値計算や平方完成等の式変形だけではなく，閉区間での２次関数の最大値・最小値を，軸の位置を考慮した上で正しく判定するため，生徒にグラフをかいて考える習慣を付けるように指導していることと思います。

そこで生徒にグラフをかくことの大切さをより強く意識付けるため，グラフをかくことで解答が容易になる関数の問題を考案してみました。小さい工夫ですが，これまでにない新しい工夫と思われるので，ここに紹介したいと思います。

§1. １次関数，グラフが右上がりか右下がりか

中学２年で学ぶ１次関数の応用問題で，

「定義域が $1\leqq x\leqq 3$，値域が $2\leqq y\leqq 6$ である
１次関数を求めよ。」

という問題があります。要は求める１次関数を $y=ax+b$ とおき，２つの端点を代入して係数 a と b の値を求めればよいのですが，このままだと傾き a が $a>0$ のときと $a<0$ のときの２通りの解が出ます。そこで多くの問題では，「$a<0$」等の付帯条件を付けて出題されます。このことから，この問題では傾き a の符号が本質的であるとも言えるでしょう。

しかし，この付帯条件なしで解を一意に，すなわち傾きの符号を限定することはできないでしょうか。と言っても，「２点 $(1,\ 6)$，$(3,\ 2)$ を通る」のような問題では，計算の結果から傾きの符号が決まるだけで，傾きの符号を利用して解いているわけではありません。生徒が立式する際に傾きの符号に気を付けないと矛盾が生じる，というように傾きの符号が本質的に解法に影響を及ぼすように条件を設定したいのです。これは恐らく新規の問題設定ですので，さらに問題を分析してみます。

生徒は傾きを正として考えがちですから，以下，傾きが負になる問題を考えます。すると定義域の左端に値域の最大値が，また定義域の右端に値域の最小値が対応することになりますが，それらが必然となるように問題を設定します。傾き a が負になる所がこの問題の本質なので，a は未知数でなければなりません。その分，y 切片 b は既知にします。そして定義域または値域の端点の１つを未知数にします。しかし，このままでは先に書いたようにグラフが２通りになってしまうので，もう１点，グラフが通らねばならない点を設定する必要があります。かなり欲張った考えですが，そんな都合の良い点が本当に設定できるのでしょうか。

そう考えて行くと，先に既知にした y 切片が第３の点になることに気付きました。それを利用して作ったのが次の問題です。

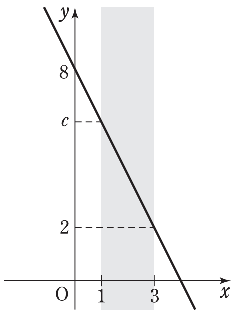
［問１］　関数 $y=ax+8$ $(1\leqq x\leqq 3)$ の値域が $2\leqq y\leqq c$ となるような定数 a，c の値を求めよ。

［解１］　(i)　グラフが点 $(1,\ 2)$ を通るとすると，
$2=a+8$ より　$a=-6$
このとき，点 $(3,\ c)$ も通るので　$c=-6\cdot 3+8=-10$
すると $c<2$ となるので不適。
(ii)　グラフが点 $(3,\ 2)$ を通るとすると，$2=3a+8$
より　$a=-2$

このとき，点 $(1,\ c)$ も通るので　$c=-2\cdot1+8=6$
これは適する。　(答) $a=-2,\ c=6$

計算だけで解こうとする生徒は，恐らく上記のように「場合分け」をして解答するでしょう。しかしこの問題を，先に書いた y 切片に着目してグラフをかけば，場合分けなしで解けます。

［**解 2**］　$x=0$ のとき $y=8$ で，最小値 $2<8$ であることから，グラフは右下がりになる。したがって，グラフは点 $(3,\ 2)$ を通ることになり　$a=-2$
また，点 $(1,\ c)$ を通るので　$c=6$　答



［**注意**］　問 1 では，最初の例と合わせて未知数が 2 個の連立方程式を解くよう問題設定を考えたが，
「関数 $y=ax+8$ $(1\leqq x\leqq3)$ の値域が
$2\leqq y\leqq6$ となるように定数 a の値を求めよ。」
のように傾き a のみを未知数としても問題は成立する。しかし，この場合は解の吟味($a=-6$ は不適)をする必要があり，中学生はこの手の解答に慣れていないため，解 1 の前半だけで解答を終えて，間違いに気付かない恐れがある。そのため，問 1 のように，問題の中で解の吟味をさせることが，教育的配慮であろう。

このように 1 次関数では，授業でもグラフをかく際に強調している y 切片を利用することで，自然に傾きの符号が限定される問題を作ることができました。なお，解答を見ればわかるように，この問題では y 切片が最小値に影響を与えているため，定義域として正負をまたがないような区間に設定することが必要になります。
それでは同様の設定は，2 次関数
$f(x)=ax^2+bx+c$ に対しても可能でしょうか。
それを次節で考えていきましょう。

§2.　2 次関数の場合，グラフの凹凸

2 次関数の大きなの特徴(教育的意義)の 1 つは，増減が単調ではない，すなわち必ずしも端点で最大値・最小値をとるとは限らず，区間の中間でとることも起こる点だと思います。そして 1 次関数におけるグラフの傾きがその形状を特徴付けるように，2 次関数における 2 次の係数 a は，グラフの凹凸を定める重要な条件です。そして求める係数については，煩雑さを避けて，2 次の係数 a の値のみにしました。しかも生徒は $a>0$ として考えがちなので，問題を作成する際，やはり必然的に $a<0$ でなければならないように設定します。すると条件としては，頂点を避けるために，与えられた定義域(閉区間)の範囲で最大値でなく最小値を与えることが望ましくなります。なお，解の吟味のために最大値も求めさせました(前節の注意参照)。

具体的な問題を提示する前に，興味を持った方が今後問題を自作できるように，2 次関数が定義域内で最小値をとるという条件について，さらに詳しく調べてみます。

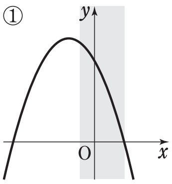
以下，文字 p，q，s，t，m をそれぞれ，p は頂点の x 座標，q は頂点の y 座標，s は定義域の左端，t は定義域の右端，m は定義域内での最小値として使用します。2 次関数
$f(x)=a(x-p)^2+q$ $(s\leqq x\leqq t)$
において，最小値が m という条件を立式すれば，
$f(p)=m$ (頂点で最小)
$f(s)=m$ (左端で最小)
$f(t)=m$ (右端で最小)
のいずれかが成り立ちます。これらが先に書いた 2 次関数の特徴，すなわち最大値・最小値に関する性質です。これは具体的な点を通るという条件に比べて，可能性が 3 通りある分，条件が弱いと言えるでしょう。それは解が一意に定まらない可能性が高いことを意味します。

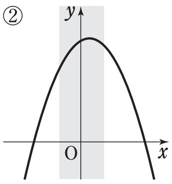
そこで 1 次関数と同様，y 切片を固定する ($f(0)=ap^2+q$ が a によらない定数となるように q を定める)ことにより，解が一意 $(a<0)$ となるように問題を設定することを考えました。その具体的な問題作成のために，定義域と軸について場合分けをして調べてみます。
定義域 $(s\leqq x\leqq t)$ については，

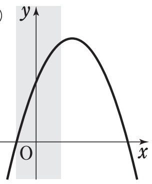
(1)　正負をまたぐ ($s<0<t$)
(2)　正の部分のみ ($s>0$)
(3)　負の部分のみ ($t<0$)
の3通りがありますが，(3)は(2)と本質的に同じであるため，以降(3)は考慮しません。

続いて上記(1)(2)のそれぞれの場合に対して，2次関数の本質である軸 ($x=p$) の位置を考えれば，次のように分類できます。

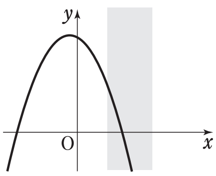
(1)　定義域が正負をまたぐ ($s<0<t$) 場合，次の3通りが考えられる。
　①　軸が定義域外で左側 ($p<s$)
　②　軸が定義域内 ($s<p<t$)
　③　軸が定義域の右側 ($p>t$)

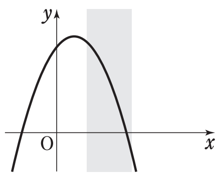
①


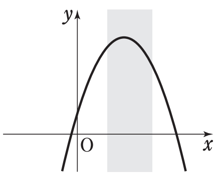
②


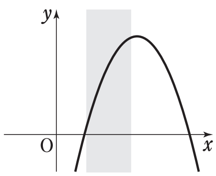
③


(2)　定義域が正の部分のみの場合 ($s>0$)，y 軸との位置関係も考慮するので，次の4通りになる。
　④　軸が負 ($p<0$，定義域外で y 軸の左側)
　⑤　軸が正で，定義域の左外側 (y 軸との間にある) ($0<p<s$)
　⑥　軸が定義域内 ($s<p<t$)
　⑦　軸が定義域の右外側 ($p>t$)

④


⑤


⑥


⑦


紙面の都合でいきなり結論を書きますが，(1)定義域が正負をまたぐ場合は，1つの条件で解 (a の符号) を一意に限定することは無理のようでした。しかし(2)定義域が正の部分のみの場合は，軸の位置に関わらず1つの条件で問題作成が可能でした。そこで節を改めて，(2)で各々の軸の位置に対して作成した問題を紹介しましょう。

§3. 具体的な問題例

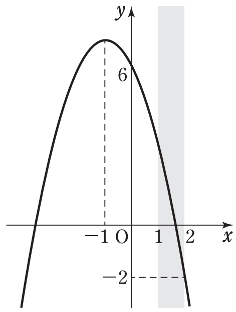
以下の問題では，すべて

「2次関数 $f(x)$ の最小値を与えたときに，2次の係数 a の値と $f(x)$ の最大値を求める」

ことを問うので，その記載は省略します。また問題番号の後の④〜⑦は，前節の条件番号を表します。

[問2④]　$f(x)=ax^2+2ax+6$ $(1\leqq x\leqq 2)$ の最小値が -2 である。

[解]　$f(x)=a(x+1)^2-a+6$ より，軸は
　$x=-1$



y 切片が6で最小値が -2 なので，グラフは軸の右側 (定義域を含む) で単調減少。
よって　$a<0$
このとき最小値は
$f(2)=-2$ となるため
　$a=-1$
また最大値は　$f(1)=3$　答

参考までに，よくある誤答を書いてみました。

[誤答1]　$f(-1)=-2$ より　$a=8$

誤答1は，定義域を確認せず「最小は頂点」という思い込みから起きます。もちろんこの問題では頂点は定義域外にあります。

[誤答2]　$f(1)=-2$ より　$a=-\dfrac{8}{3}$

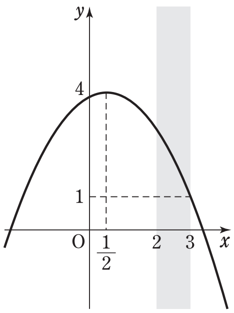
誤答2は，グラフが定義域の端点 $(1,\ -2)$ を通るという条件を利用しただけとなり，$f(1)$ が本当に最小値であるかという点までは気が回っていません。軸の位置は調べたものの，$a>0$ と勝手に判断した場合にもこの誤答が見られます。求めた a の値は負なのでこの時点で間違いに気付いてくれれば救われますが，この手の解答をする生徒は往々にして過ちに気付かないものです。

これらの誤答は少し確認すれば条件を満たさないことがわかりますが，グラフをかけばより明白になり，誤りを未然に防ぐことができます。このような問題を通して，生徒にグラフをかいて考えることの必要性を訴えることができると考えます。

［問 3 ⑤］　$f(x)=ax^2-ax+4$ $(2 \leqq x \leqq 3)$ の最小値が 1 である。

［解］　$f(x)=a\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}a+4$ より，軸は

$$x=\frac{1}{2}$$



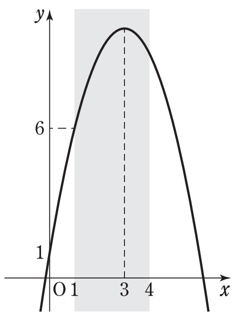
y 切片が 4 なので，
$a>0$ かつ $f(2)=1$ が最小値となることはない。よって $a<0$
このとき最小値は $f(3)=1$ より

$$a=-\frac{1}{2}$$

また最大値は　$f(2)=3$

［問 4 ⑥］　$f(x)=ax^2-6ax+1$ $(1 \leqq x \leqq 4)$ の最小値が 6 である。

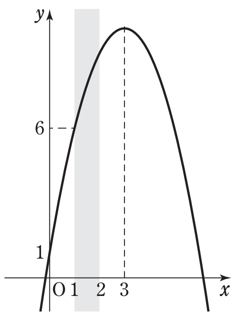
［解］　$f(x)=a(x-3)^2-9a+1$ より，軸は　$x=3$



頂点が定義域に含まれ y 切片が 1 なので，頂点の y 座標が最小値 6 にはなり得ない。
よって　$a<0$
このとき最小値は
$f(1)=6$ より　$a=-1$
また最大値は　$f(3)=10$

［問 5 ⑦］　$f(x)=ax^2-6ax+1$ $(1 \leqq x \leqq 2)$ の最小値が 6 である。

［解］　$f(x)=a(x-3)^2-9a+1$ より，軸は $x=3$



軸が定義域の右外側で，最小値と y 切片を比較すると，$6>1$ なので定義域内で単調増加，
よって　$a<0$
このとき最小値は
$f(1)=6$ より　$a=-1$
また最大値は $f(2)=9$

以上のように，2 節の④〜⑦のどの分類に対しても，2 次の係数 a の符号が一意になる問題を設定することが可能でした。またどの問題も，条件を最大値が与えられた問題に変えても成立します。
すなわち（以下で（　）内は立式と答の a の値），

［問 2′］　$f(x)=ax^2+2ax+6$ $(1 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が 3 である。　$(f(1)=3,\ a=-1)$

［問 3′］　$f(x)=ax^2-ax+4$ $(2 \leqq x \leqq 3)$ の最大値が 3 である。　$\left(f(2)=3,\ a=-\dfrac{1}{2}\right)$

［問 4′］　$f(x)=ax^2-6ax+1$ $(1 \leqq x \leqq 4)$ の最大値が 10 である。　$(f(3)=10,\ a=-1)$

［問 5′］　$f(x)=ax^2-6ax+1$ $(1 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が 9 である。　$(f(2)=9,\ a=-1)$

としても問題として出題はできます。ただし問 4′ では，安易に「最大値は頂点のとき」と判断して $f(3)=10$ と立式しても正解してしまうため，解答者が本当にグラフの様子を理解して立式したかどうかが判定できません。最初に書いたように，今回紹介した問題を作った意図は「閉区間での 2 次関数の最大値・最小値を，軸の位置を考慮した上で正しく判定できる」ことの確認です。出題者は，安易に問題を選んで出題の意図に沿わなくならないように注意する必要があるでしょう。

最後になりますが，定期試験でこの問題を出題する機会に恵まれ，先の問 4 を出題したところ，正解した多くの生徒は，$a>0$ の場合と $a<0$ で場合分けをして，「$a>0$ の場合は $f(4)=6$ より $a=-\dfrac{5}{8}<0$ となるため不適」のように解答していました。授業ではグラフをかく際の y 切片の重要さを強調していたつもりでしたが…，生徒がグラフをかいて考えることへの敷居は，まだまだ高いようです。

（広島県　広島女学院中学高等学校）