常用対数表を用いた授業実践

中出（なかで）　公平（こうへい）

§1. はじめに

数Ⅱの教科書の後ろのページに常用対数表が載っています。私の授業でも $\log_{10}6.23$ をこの表から 0.7945 のように概数を調べる演習は行いますが，私の教材研究不足からか常用対数表を活用する授業はあまり行っていませんでした。そこで，今回，本校で公開授業の機会がありましたので，常用対数表を用いて，以下のような授業を行いました。

§2. 大きい数の処理

問 1　2^{29} は何桁の数か。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

教科書でよくある演習問題です。小数の計算練習もしてもらうために 29 乗に設定してみました。

(解)　$\log_{10}2^{29}=29\log_{10}2=29\times0.3010=8.729$
$8<8.729<9$ より　$\log_{10}10^8<\log_{10}2^{29}<\log_{10}10^9$
底 10 は 1 より大きいので，$10^8<2^{29}<10^9$ で
9 桁

生徒も既習のところだったので，ほとんどの生徒が完答しました。ただし，今回は常用対数表を活用するということで次のような問題も出題しました。

問 2　2^{29} の概数を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。

このような問題は，常用対数の必要性を感じる良問だと私は思いますが，解答の概数設定が難しいので問題集にあまりみかけないのが実状だと思います。常用対数を計算後，整数部分と小数部分に分けることがよく知られたポイントです。

(解)　問 1 より $\log_{10}2^{29}=8.729=8+0.729$　……①
常用対数表より $\log_{10}5.36\fallingdotseq0.729$ とみて，①は
$\log_{10}2^{29}\fallingdotseq\log_{10}5.36\times10^8$ で
およそ 536000000

ここで私は $2^{29}=536870912$ と数値を提示し，常用対数表を利用した計算は近似値としてふさわしいかグループで相談して，挙手してもらいました。すると，生徒は 2：1 ぐらいの割合で近似値としてはふさわしくないと判断しました。そこで，私は「正解はありません。例えば，お金だったら 5 億 3600 万と 5 億 3687 万の 87 万円の差は大きいよね。でも，目的地まであと 53 km 600 m と 53 km 687 m だったらだいぶいい計算ではないですか。53 km まで歩いて，あと 87 m 位の誤差ならば目的地の場所を探せませんか。」と昔の人は後者のような常用対数表の使い方をしたのではないか。と大航海時代の背景も絡めて説明しました。このように，数学から日常生活の感覚を磨いて，数学に対する興味を持ってもらうことが今回の入試改革の骨子だと思います。

§3. マグニチュードについて

問 3　マグニチュード 6.9 と 9.0 を比較せよ。

$$\log_{10}E=4.8+1.5M \quad \cdots\cdots①$$

E：エネルギー，M：マグニチュード

気象庁のホームページを参照すると，マグニチュード 6.9 は能登半島地震で，9.0 は東日本大震災です。生徒にはなぜこの値を選んだか口頭で説明しました。被災された方の心情を考えると教材としてふさわしくないのかもしれないと今でも悩みます。しかしながら，今回授業を行った対象は，建設造形科という学科で学ぶ生徒です。卒業したら，建設業や土木工事など現場に就く機会が多く，耐震設計技術など未来に向けて課題を持ち，社会で活躍してほしい思いを込めて地震をメインテーマに選定しました。

(解)　マグニチュード 6.9 は，①より

$$\log_{10}E=4.8+1.5\times6.9=4.8+10.35=15.15$$

よって　$E=10^{15.15}$

次に，マグニチュード 9.0 は，①より

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5 \times 9.0 = 4.8 + 13.5 = 18.3$$

よって　$E = 10^{18.3}$

私は授業で 2 つの方法で比較してみました。

(i)　指数を整数で評価する

$$\frac{10^{18.3}}{10^{15.15}} = 10^{18.3-15.15} = 10^{3.15} \fallingdotseq 10^3$$

なのでおよそ 1000 倍

(ii)　常用対数表で評価する

$$\begin{aligned}\log_{10}\frac{10^{18}}{10^{15.15}} &= \log_{10} 10^{3.15} = 3 + 0.15 \\ &\fallingdotseq \log_{10} 10^3 + \log_{10} 1.41 \\ &= \log_{10} 1.41 \times 10^3\end{aligned}$$

$\frac{10^{18.3}}{10^{15.15}} \fallingdotseq 1.41 \times 10^3$　なのでおよそ 1410 倍

マグニチュードの差は 2.1 であったとしても，エネルギー量はかなり異なります。生徒に地震のニュースはそのような感覚で見ないといけませんと伝えました。

また，(i)で評価することも大切ですが，(ii)とはだいぶエネルギー量が異なります。そこで，1 つ問いを与えました。

問 4　マグニチュード 6.9 と 7.3 を比較せよ。

熊本地震ではマグニチュード 7.3 でした。

マグニチュード 6.9 は前問より　$E = 10^{15.15}$

マグニチュード 7.3 は

$$\begin{aligned}\log_{10} E &= 4.8 + 1.5 \times 7.3 \\ &= 15.75 \qquad \text{よって}\quad E = 10^{15.75}\end{aligned}$$

このとき，(i)の評価は $\frac{10^{15.75}}{10^{15.15}} = 10^{0.6} \fallingdotseq 10^1$ ですから，少し値が離れすぎるかなと思います。むしろ $10^{0.6} \fallingdotseq 10^{0.5}$ として $\sqrt{10}$ を評価する方法でもいいのですが，(ii)が有効です。

$\log_{10} 10^{0.6} = 0.6 \fallingdotseq \log_{10} 3.98$　なので　3.98 倍

(i)と(ii)は状況に応じて，使いわけることが大切です。

§4. 入試問題について

2019 年の京都大学(文系)で常用対数表が活用された問題がありました。生徒に資料として配布しました。

問 5　8.94^{18} の整数部分は何桁か。また，最高位から 2 桁の数字を求めよ。例えば，12345.6789 の最高位からの 2 桁は 12 を指す。(19 京都大・文系)

(解 1)

$$\begin{aligned}\log_{10} 8.94^{18} &= 18\log_{10} 8.94 \\ &= 18 \times 0.9513 \\ &= 17.1234\end{aligned}$$

$17 < \log_{10} 8.94^{18} < 18$　で 8.94^{18} は 18 桁の数。

また，

$$17 + 0.1206 < 17 + 0.1234 < 17 + 0.1239 \quad \cdots\cdots①$$

より

$$17 + \log_{10} 1.32 < \log_{10} 8.94^{18} < 17 + \log_{10} 1.33$$

$1.32 \times 10^{17} < 8.94^{18} < 1.33 \times 10^{17}$　……②　なので最高位から 2 桁の数字は 13 である。

最初はこの解答を紹介しようとしましたが，数学的にはよくありません。常用対数表は四捨五入をした概数です。常用対数表のまま計算すると 18 倍のところで評価が粗くなります。実際に表計算ソフトで計算をすると 8.94^{18} は 1.33069E+17 ですから 18 桁です。ところが，最高位を 3 桁までとすると 133 ですから②の評価は崩れてしまいます。

もし，$\log_{10} 8.94 = 0.9513375$　まで許容すると $18 \times 0.9513375 = 17.124075$ で①の右辺の値より大きくなります。

そのような理由から，本校の生徒には問題文を次のように変更しました。

問 6　8.94^{18} の整数部分は何桁か。また，最高位から 2 桁の数字を求めよ。ただし，常用対数は常用対数表の値とする。　(19 京都大・文系改)

常用対数値を確定値にすることで(解 1)の解き方でよくなります。問題作成者の意図は常用対数表は概数なので，しっかりと不等式で矛盾なしに評価しなさいと，このような出題をされていると思います。

出題者の意図と離れたと思いますが，問題文を変更して不等式の評価に慣れていない生徒にも解きやすくすることを優先しました。

問 5 を実際に，解答するならば(解 2)のように解きます。多分，皆さんも同じように解かれると思います。

(**解 2**) $\log_{10} 8.94^{18} = 18 \log_{10} 8.94$
常用対数表から

$$0.951 < \log_{10} 8.94 < 0.952 \quad \cdots\cdots ①$$

両辺を 18 倍して

$$17.118 < \log_{10} 8.94^{18} < 17.136 \quad \cdots\cdots ②$$

となり 8.94^{18} は 18 桁の数。
また，②の左辺と右辺に対して

$$17 + 0.1173 = 17.1173 < 17.118,$$
$$17.136 < 17.1367 = 17 + 0.1367$$

とあたりをつけて，常用対数表から

$$17 + \log_{10} 1.31 < 17.118, \quad 17.136 < 17 + \log_{10} 1.37 \quad \cdots\cdots ③$$

③から②は

$$17 + \log_{10} 1.31 < \log_{10} 8.94^{18} < 17 + \log_{10} 1.37$$

$1.31 \times 10^{17} < 8.94^{18} < 1.37 \times 10^{17}$ で最高位の 2 桁は 13 である。

①で常用対数を不等式評価することがポイントです。18 倍のところで評価は粗くなりますが，誤差は少なくなります。この出題に対する不等式評価としてはよかったのではないかなと考えています。

§5. おわりに

教科書に載っている常用対数表は概数で与えられます。常用対数表は状況に応じて与えられた値を不等式で評価する練習や，日常生活の課題でも数学が必要な意味を知る機会を与えます。作問の工夫により学びの可能性が大きく広がることを今回の公開授業を通して知りました。このような機会を与えてくれた学校と生徒に感謝します。

《参考文献》

〔1〕 高等学校数学用　最新数学Ⅱ(教科書) 数研出版
〔2〕 気象庁ホームページ https://www.data.jma.go.jp/svd/eqev/data/higai/higai1996-new.html

(石川県立羽咋工業高等学校)