直方体の辺と対角線の長さの考察

木村（きむら）　嘉宏（よしひろ）

§1. はじめに

本題に入る前に，長方形の縦，横の 2 辺と対角線の長さについて整理しておく。

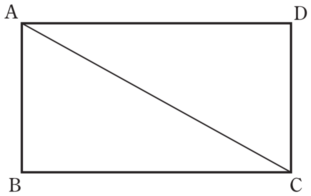
長方形 ABCD において

AB$=a$，BC$=b$，AC$=c$ とすると

△ABC は直角三角形だから三平方の定理により

$$a^2+b^2=c^2$$

が成り立つ。



これを満たす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ は無数にあり，$(3,\ 4,\ 5)$，$(5,\ 12,\ 13)$，$(8,\ 15,\ 17)$ などが簡単な例である。

ここから本題に入り，直方体の辺と対角線の長さについて考察し，縦，横，高さの 3 辺と対角線の長さのすべてが自然数であるような例を見つけてみたい。

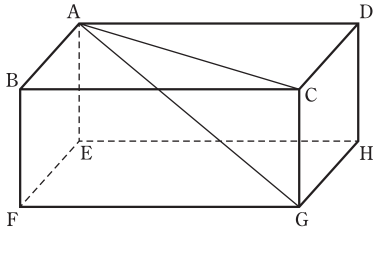
§2. 直方体の 3 辺と対角線の長さ

直方体 ABCD-EFGH について，

AB$=a$，BC$=b$，CG$=c$，AG$=d$ とすると，△ABC と △ACG はともに直角三角形だから，三平方の定理を繰り返し使うと

$$a^2+b^2+c^2=d^2 \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つことがわかる。



§3. 4 つの長さが自然数の直方体

直方体 ABCD-EFGH の 3 辺 AB，BC，CG と対角線 AG について，AB$=a$，BC$=b$，CG$=c$，AG$=d$ とし，a，b，c，d のすべてが自然数である場合を $(a,\ b,\ c,\ d)$ と表すことにする。

言い換えると

> 4 つの自然数 a，b，c，d について
> $$a^2+b^2+c^2=d^2$$
> が成り立つとき $(a,\ b,\ c,\ d)$ と表す。

実際に計算してみると

$1^2+2^2+2^2=3^2$ 　より　$(1,\ 2,\ 2,\ 3)$

$2^2+3^2+6^2=7^2$ 　より　$(2,\ 3,\ 6,\ 7)$

$3^2+4^2+12^2=13^2$ より　$(3,\ 4,\ 12,\ 13)$

が見つかる。

これら 3 つの例について

a，b に見られる規則性から，①に

$a=n$，$b=n+1$ $(n=1,\ 2,\ 3)$ を代入すると

$$n^2+(n+1)^2+c^2=d^2$$

これより

$$d^2-c^2=2n^2+2n+1$$

ここで，$d=c+1$ だから

$$d^2-c^2=(d+c)(d-c)=2c+1$$

したがって

$$2c+1=2n^2+2n+1$$

これより

$$c=n^2+n,\ d=n^2+n+1$$

このとき

$$n^2+(n+1)^2+(n^2+n)^2=(n^2+n+1)^2$$

は恒等式だから，任意の自然数 n について

$$(n,\ n+1,\ n^2+n,\ n^2+n+1) \qquad \cdots\cdots②$$

②に $n=4,\ 5,\ 6$ を代入すると

$(4,\ 5,\ 20,\ 21)$，$(5,\ 6,\ 30,\ 31)$，$(6,\ 7,\ 42,\ 43)$

§4. (1, 2, 2, 3) の拡張

(1, 2, 2, 3) から別の (a, b, c, d) を見つけた。

$1^2+4^2+8^2=9^2$ より (1, 4, 8, 9)

$1^2+6^2+18^2=19^2$ より (1, 6, 18, 19)

$1^2+8^2+32^2=33^2$ より (1, 8, 32, 33)

b に見られる規則性から①に

$a=1$, $b=2n$ ($n=1$, 2, 3, 4) を代入すると

$1^2+(2n)^2+c^2=d^2$

これより

$d^2-c^2=4n^2+1$

ここで, $d=c+1$ だから

$2c+1=4n^2+1$

これより

$c=2n^2$, $d=2n^2+1$

このとき

$1^2+(2n)^2+(2n^2)^2=(2n^2+1)^2$

は恒等式だから, 任意の自然数 n について

$(1, 2n, 2n^2, 2n^2+1)$

§5. (2, 3, 6, 7) の拡張

$2^2+5^2+14^2=15^2$ より (2, 5, 14, 15)

$2^2+7^2+26^2=27^2$ より (2, 7, 26, 27)

$2^2+9^2+42^2=43^2$ より (2, 9, 42, 43)

b に見られる規則性から, ①に

$a=2$, $b=2n+1$ ($n=1$, 2, 3, 4) を代入すると

$2^2+(2n+1)^2+c^2=d^2$

これより

$d^2-c^2=4n^2+4n+5$

ここで, $d=c+1$ だから

$2c+1=4n^2+4n+5$

これより

$c=2n^2+2n+2$, $d=2n^2+2n+3$

このとき

$2^2+(2n+1)^2+(2n^2+2n+2)^2=(2n^2+2n+3)^2$

は恒等式だから, 任意の自然数 n について

$(2, 2n+1, 2n^2+2n+2, 2n^2+2n+3)$

§6. (3, 4, 12, 13) の拡張

$3^2+6^2+22^2=23^2$ より (3, 6, 22, 23)

$3^2+8^2+36^2=37^2$ より (3, 8, 36, 37)

$3^2+10^2+54^2=55^2$ より (3, 10, 54, 55)

b に見られる規則性から, ①に

$a=3$, $b=2n+2$ ($n=1$, 2, 3, 4) を代入すると

$3^2+(2n+2)^2+c^2=d^2$

これより

$d^2-c^2=4n^2+8n+13$

ここで, $d=c+1$ だから

$2c+1=4n^2+8n+13$

これより

$c=2n^2+4n+6$, $d=2n^2+4n+7$

このとき

$3^2+(2n+2)^2+(2n^2+4n+6)^2=(2n^2+4n+7)^2$

は恒等式だから, 任意の自然数 n について

$(3, 2n+2, 2n^2+4n+6, 2n^2+4n+7)$

§7. 一般化の試み

4, 5, 6 で得た (a, b, c, d) は

(1, 2, 2, 3), (1, 4, 8, 9),

(1, 6, 18, 19), (1, 8, 32, 33),

(2, 3, 6, 7), (2, 5, 14, 15),

(2, 7, 26, 27), (2, 9, 42, 43),

(3, 4, 12, 13), (3, 6, 22, 23),

(3, 8, 36, 37), (3, 10, 54, 55)

これらに見られる規則性から, ①に

$a=m$ ($m=1$, 2, 3)

$b=2n+m-1$ ($n=1$, 2, 3, 4)

を代入すると

$m^2+(2n+m-1)^2+c^2=d^2$

これより

$$\begin{aligned} d^2-c^2&=m^2+4n^2+m^2+1+4nm-2m-4n \\ &=4n^2+2m^2+4nm-2m-4n+1 \end{aligned}$$

ここで, $d=c+1$ だから

$2c+1=4n^2+2m^2+4nm-2m-4n+1$

これより

$c=2n^2+m^2+2nm-m-2n$,

$d=2n^2+m^2+2nm-m-2n+1$

このとき

$m^2+(2n+m-1)^2+(2n^2+m^2+2nm-m-2n)^2$

$=(2n^2+m^2+2nm-m-2n+1)^2$

は恒等式だから, 任意の自然数 m, n について

$a=m$, $b=2n+m-1$,

$c=2n^2+m^2+2nm-m-2n$

$d=2n^2+m^2+2nm-m-2n+1$

として, (a, b, c, d) が得られる。

§8. 平方数の性質から

奇数の平方は 4 で割ると 1 余る ……③

偶数の平方は 4 で割り切れる ……④

このことから

(i) a, b, c がすべて奇数のとき

③より，$a^2+b^2+c^2$ を 4 で割った余りは 3

一方，d^2 を 4 で割った余りが 3 になることはないので，①は成り立たない。

(ii) a, b, c のうち 2 つが奇数，1 つが偶数のとき

③より，$a^2+b^2+c^2$ を 4 で割った余りは 2

一方，d^2 を 4 で割った余りが 2 になることはないので，①は成り立たない。

(iii) a, b, c のうち 1 つが奇数，2 つが偶数のとき

③より，$a^2+b^2+c^2$ を 4 で割った余りは 1

このとき，d は奇数である。

(iv) a, b, c がすべて偶数のとき

④より，$a^2+b^2+c^2$ は 4 で割り切れる。

このとき，d は偶数である。

したがって，a, b, c, d が既約であるのは，(iii)の場合に限る。

(iii)の場合を $a \leqq b \leqq c$ として整理し，c が奇数であるような (a, b, c, d) を見つける方法を考えてみよう。

まず，①を

$a^2+b^2=d^2-c^2$ ……⑤

と変形する。

c，d を隣り合う奇数にすれば

$d^2-c^2=(2n+1)^2-(2n-1)^2=8n$

だから，適当な n を選ぶことにより，⑤の右辺は任意の 8 の倍数になり得る。

したがって，左辺が 8 の倍数であれば⑤が成り立ち，①を導くことができる。

ちなみに，a, b をともに 4 で割ると 2 余る偶数とするか，または a, b をともに 4 で割り切れる偶数としたときに a^2+b^2 は 8 の倍数になる。

§9. c が奇数である (a, b, c, d) とその一般化

重複に注意しながら調べると

$a=2$ のとき

$2^2+6^2+9^2=11^2$ より (2, 6, 9, 11)

$2^2+10^2+25^2=27^2$ より (2, 10, 25, 27)

$2^2+14^2+49^2=51^2$ より (2, 14, 49, 51)

$2^2+18^2+81^2=83^2$ より (2, 18, 81, 83)

$a=4$ のとき

$4^2+8^2+19^2=21^2$ より (4, 8, 19, 21)

$4^2+12^2+39^2=41^2$ より (4, 12, 39, 41)

$4^2+16^2+67^2=69^2$ より (4, 16, 67, 69)

$4^2+20^2+103^2=105^2$ より (4, 20, 103, 105)

$a=6$ のとき

$6^2+10^2+33^2=35^2$ より (6, 10, 33, 35)

$6^2+14^2+57^2=59^2$ より (6, 14, 57, 59)

$6^2+18^2+89^2=91^2$ より (6, 18, 89, 91)

$6^2+22^2+129^2=131^2$ より (6, 22, 129, 131)

これらに見られる規則性から，①に

$a=2m$ $(m=1, 2, 3)$

$b=4n+2m$ $(n=1, 2, 3, 4)$ を代入すると

$(2m)^2+(4n+2m)^2+c^2=d^2$

これより

$d^2-c^2=8m^2+16n^2+16nm$

ここで，$d=c+2$ だから

$d^2-c^2=(d+c)(d-c)=2(2c+2)$

したがって

$2(2c+2)=8m^2+16n^2+16nm$

これより

$c=2m^2+4n^2+4nm-1$

$d=2m^2+4n^2+4nm+1$

このとき

$(2m)^2+(4n+2m)^2+(2m^2+4n^2+4nm-1)^2$

$=(2m^2+4n^2+4nm+1)^2$

は恒等式だから，任意の自然数 m，n について

$a=2m$

$b=4n+2m$

$c=2m^2+4n^2+4nm-1$

$d=2m^2+4n^2+4nm+1$

として，(a, b, c, d) が得られる。

§10. その他の自然数の組

$2^2+10^2+11^2=15^2$ より (2, 10, 11, 15)

$2^2+14^2+23^2=27^2$ より (2, 14, 23, 27)

$6^2+10^2+15^2=19^2$ より (6, 10, 15, 19)

$6^2+14^2+27^2=31^2$ より (6, 14, 27, 31)

など (a, b, c, d) は他にも見つけられる。

(京都府立海洋高等学校)