2次不定方程式の便利な解法

臼井（うすい）　達哉（たつや）

§1. きっかけ

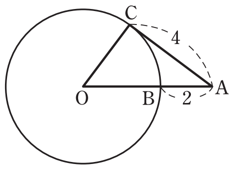
その昔，三平方の定理を学んだとき，2つの例

$3^2+4^2=5^2$，$5^2+12^2=13^2$

を見て「3辺の長さがすべて自然数である直角三角形は他にあるだろうか」という疑問を持ちました。

その少し後，次のような問題に出会いました。

右図で直線ACは円Oの接線であり，AC＝4，AB＝2である。円Oの半径を求めよ。



解答：円の半径をxとすると

$$x^2+4^2=(x+2)^2 \quad \cdots\cdots①$$

$$12=4x \qquad よって\quad x=3 \quad \cdots\cdots答$$

ここで気づいたことは，①は見かけ上はxの2次方程式ですが，実際には1次方程式になることです。ですから4，2が他の自然数であってもxは無理数にはなりません。そこで4，2をそれぞれa，bにおき換えると

$$x^2+a^2=(x+b)^2 \quad \cdots\cdots(1)$$

これから　$x=\dfrac{a^2-b^2}{2b}$

これを(1)に代入して，右辺を整理すると

$$\left(\frac{a^2-b^2}{2b}\right)^2+a^2=\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^2$$

両辺に$(2b)^2$をかけて

$$(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2$$

ピタゴラス数を表す有名な公式が得られました。この等式のa，bにいろいろな自然数を代入すれば，3辺の長さが自然数であって相似でない直角三角形を無数に作ることができます。これは当時の私にとって大きな発見でした。

§2. 解法の原理

$$a^2+T=b^2 \quad \cdots\cdots(2)$$

という形の等式を考えます。これをaまたはbについて解くとき平方根が必要ですが，(1)の方法を用いて　$b=a+c$　とおくと

$$a^2+T=(a+c)^2 \quad \cdots\cdots(3)$$

これはaの1次方程式であり，$a=\dfrac{T-c^2}{2c}$　となります。これを(3)に代入すると

$$\left(\frac{T-c^2}{2c}\right)^2+T=\left(\frac{T+c^2}{2c}\right)^2$$

たったこれだけのことです。この方法を用いると，整数論的考察をすることなく，いろいろな2次不定方程式の整数解を無数に生成する恒等式を得ることができます。ただしすべての解が得られるという保証はありません。応用例からわかるように，未知数が3つ以上の不定方程式に対して有効です。

数研通信No.49，No.84で扱われていた，1つの角が60°または120°の三角形も簡単に作ることができます。そこでは(2)においてTがaの1次式の場合を扱います。

§3. 応用

1． 3つの平方数の和が平方数になる例を作ります。

$$a^2+b^2+x^2=(c+x)^2 \quad \cdots\cdots①$$

とおくと　$x=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2c}$

これを①に代入して右辺をまとめると

$$a^2+b^2+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2c}\right)^2=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2c}\right)^2$$

両辺にc^2を掛けて

$$(ac)^2+(bc)^2+\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2=\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)^2$$

a，b，cの偶奇性に注意が必要ですが，

$(a,\ b,\ c)=(3,\ 2,\ 1)$のとき　$3^2+2^2+6^2=7^2$

また，両辺に 4 を掛けた

$$(2ac)^2+(2bc)^2+(a^2+b^2-c^2)^2=(a^2+b^2+c^2)^2$$

の形ならば a，b，c は任意の自然数でよいので，

$(a,\ b,\ c)=(4,\ 3,\ 2)$ のとき $16^2+12^2+21^2=29^2$

2． n 個の平方数の和が平方数になる例を作ります。

$$a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_{n-1}{}^2+x^2=(x+a_n)^2 \quad \cdots\cdots①$$

とおくと $x=\dfrac{a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_{n-1}{}^2-a_n{}^2}{2a_n}$

これを①に代入して両辺に $a_n{}^2$ を掛けると

$$(a_1a_n)^2+(a_2a_n)^2+\cdots\cdots+(a_{n-1}a_n)^2$$
$$+\left(\frac{a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_{n-1}{}^2-a_n{}^2}{2}\right)^2$$
$$=\left(\frac{a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots\cdots+a_{n-1}{}^2+a_n{}^2}{2}\right)^2$$

a_1，a_2，……，a_n の偶奇性に注意して，

$a_n=n$（$n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ 6$），$a_7=1$ とすると

$$1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+45^2=46^2$$

3． 三角形 ABC において $C=60°$ とすると，余弦定理より $c^2=a^2+b^2-ab$ ……①

文字をおき換えて $(y+z)^2=x^2+z^2-xz$ ……②

これを z について解くと $z=\dfrac{x^2-y^2}{x+2y}$

これを②へ代入して

$$\left(\frac{x^2+xy+y^2}{x+2y}\right)^2=x^2+\left(\frac{x^2-y^2}{x+2y}\right)^2-x\left(\frac{x^2-y^2}{x+2y}\right)$$

両辺に $(x+2y)^2$ を掛けて

$$(x^2+xy+y^2)^2=\{x(x+2y)\}^2+(x^2-y^2)^2$$
$$-\{x(x+2y)\}(x^2-y^2) \quad \cdots\cdots③$$

③より

$$\begin{cases} a=x(x+2y) \\ b=x^2-y^2\ (x>y) \\ c=x^2+xy+y^2 \end{cases}$$

とすれば $C=60°$ の三角形が得られます。

x	y	a	b	c
2	1	8	3	7
3	1	15	8	13
3	2	21	5	19
4	3	40	7	37
5	4	65	9	61

4． 三角形 ABC において $C=120°$ とすると，余弦定理より $c^2=a^2+b^2+ab$

$C=60°$ の場合と同じおき換えでもできますが，解が少し複雑になります。

$z^2=y^2+(x+z)^2+y(x+z)$ とおき換えて **3．** と同様の計算を行うと，最終的に

$$\begin{cases} a=y(2x+y) \\ b=x^2-y^2\ (x>y) \\ c=x^2+xy+y^2 \end{cases}$$

とすれば $C=120°$ の三角形が得られます。

x	y	a	b	c
2	1	5	3	7
3	1	7	8	13
3	2	16	5	19
4	3	33	7	37
5	4	56	9	61

5． $a^2+b^2=c^2+d^2$ の自然数解を求めます。

$$(x+p)^2+q^2=x^2+r^2 \quad \cdots\cdots①$$

より $x=\dfrac{-p^2-q^2+r^2}{2p}$

これを①に代入して両辺に $(2p)^2$ を掛けると

$$(p^2-q^2+r^2)^2+(2pq)^2=(p^2+q^2-r^2)^2+(2pr)^2$$

$p=q=1$，$r=3$ とすると $9^2+2^2=7^2+6^2$

6． $a^2+b^n=c^2$（n は自然数）の自然数解を求めます。

$$x^2+p^n=(x+q)^2 \quad \cdots\cdots①$$

とおくと $x=\dfrac{p^n-q^2}{2q}$

これを①に代入し，両辺に q^2 を掛けると

$$\left(\frac{p^n-q^2}{2}\right)^2+q^2p^n=\left(\frac{p^n+q^2}{2}\right)^2$$

が得られます。ここで q^2 に q^n を代入すると

$$\left(\frac{p^n-q^n}{2}\right)^2+(pq)^n=\left(\frac{p^n+q^n}{2}\right)^2$$

$n=3$，$p=5$，$q=3$ として $49^2+15^3=76^2$

$n=5$，$p=5$，$q=1$ として $1562^2+5^5=1563^2$

7． $a^3+b^3=c^3$ を満たす自然数 a，b，c はフェルマの大定理より存在しません。方程式の形を見ると，その解は例えば $2^3+3^3=(\sqrt[3]{35})^3$ のように立方根が必要であるような気がします。しかし⑶の考え方を 3 次方程式に用いると，次のように平方根だけを含む例を作ることができます。

$$x^3+a^3=(x+b)^3 \quad \cdots\cdots①$$

とすると $x=\dfrac{-3b^2\pm\sqrt{12a^3b-3b^4}}{6b}$

これを①に代入し，両辺に $(6b)^3$ を掛けると

$$(-3b^2\pm\sqrt{12a^3b-3b^4})^3+(6ab)^3$$
$$=(3b^2\pm\sqrt{12a^3b-3b^4})^3$$

ここで $a=2$，$b=1$ とすると

$$(-3\pm\sqrt{93})^3+12^3=(3\pm\sqrt{93})^3$$

（岐阜県立長良高等学校）