自然数の和と自然数の平方の和から

伊藤　裕（いとう　ゆたか）

§1. はじめに

1からnまでの自然数の和は，nの値によって平方数になることもあればならないこともある。平方数にならない場合でも，適当な整数を足すと平方数にすることができる。まず，自然数の和の場合を考え，次に自然数の平方の和についても同様のことを考える。既出の内容ばかりかもしれませんが，ご容赦ください。

§2. 自然数の和の場合

1からnまでの自然数の和に，整数kを足すと平方数になったとする。つまり，mを自然数として，

$$(1+2+\cdots\cdots+n)+k=m^2 \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つとする。このとき，①を変形すると，

$$\begin{aligned} ① &\iff \frac{1}{2}n(n+1)+k=m^2 \\ &\iff \left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+2k=2m^2 \\ &\iff (2n+1)^2-1+8k=8m^2 \\ &\iff (2n+1)^2-2(2m)^2=1-8k \end{aligned}$$

より，方程式

$$x^2-2y^2=1-8k \quad \cdots\cdots②$$

が，整数解をもつことになる。方程式②が整数解をもてば，xは奇数でyは偶数であるから，方程式②が整数解をもつかどうかを考えればよい。

②の形の方程式は（特に右辺が ±1 のとき）Pell方程式とよばれ研究されており，嬉しいことにその解の構造が完全にわかっている。まず②で $k=0$ として，いつ1からnまでの自然数の和が平方数になるか考えてみる。

$x^2-2y^2=1$ のすべての自然数解は

$$x_l+y_l\sqrt{2}=(3+2\sqrt{2})^l \quad (l\text{ は自然数}) \quad \cdots\cdots③$$

で定められる自然数x_l，y_lを用いて

$$(x,\ y)=(x_l,\ y_l) \quad (l\text{ は自然数})$$

と表されることが知られており，この事実の証明は1985年の東工大の入試でも出題されている。

③からx_lを求めることを考える。整数x，yに対して，$\alpha=x+y\sqrt{2}$ とおくとき，αの共役$\overline{\alpha}$を

$$\overline{\alpha}=x-y\sqrt{2}$$

で定めれば，これは複素共役と同様の性質をもつ。③の両辺の共役をとると，

$$\overline{x_l+y_l\sqrt{2}}=\overline{(3+2\sqrt{2})^l}$$

となるが，

$$\overline{(3+2\sqrt{2})^l}=(\overline{3+2\sqrt{2}})^l=(3-2\sqrt{2})^l$$

に注意して

$$x_l-y_l\sqrt{2}=(3-2\sqrt{2})^l \quad \cdots\cdots④$$

③と④を加えることにより

$$x_l=\frac{1}{2}\{(3+2\sqrt{2})^l+(3-2\sqrt{2})^l\}$$

そして，②で $2n+1=x$ とおいていたので

$$2n+1=\frac{1}{2}\{(3+2\sqrt{2})^l+(3-2\sqrt{2})^l\}$$

とすることにより，

$$n=\frac{1}{4}\{(3+2\sqrt{2})^l+(3-2\sqrt{2})^l-2\} \quad \cdots\cdots⑤$$

を得る。

この⑤に $l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$と代入していくと $n=1,\ 8,\ 49,\ \cdots\cdots$となるが，この$n$が1から$n$までの自然数の和がちょうど平方数になる場合である。実際，

$$1=1^2,\ 1+2+\cdots\cdots+8=36=6^2,$$
$$1+2+\cdots\cdots+49=1225=35^2,\ \cdots\cdots$$

となっている。

次に，$k\neq0$ の場合を考える。まず，次の定理が成り立つことに注意する（参考文献〔1〕）。

[定理]　自然数x，yを用いてx^2-2y^2の形で表される数を割り切る素数pは，

$$p=2 \text{ または } p\equiv1,\ 7\ (\mathrm{mod}\,8) \quad \cdots\cdots⑥$$

を満たす。

逆に，⑥を満たす素数 p に対して，

$p=x^2-2y^2$ を満たす自然数 x，y が存在する。□

さらに，A を1より大きい自然数とするとき，次の2つの性質が成り立つ。

［性質1］ Aを素因数分解したときに現れる素数を p_1，p_2，……，p_n としたとき

$x^2-2y^2=p_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ がそれぞれ整数解をもつ

$\Longleftrightarrow$ $x^2-2y^2=A$ が整数解をもつ

（証明） $(\Longrightarrow)$ まず，整数 x，y，z，w に対して，恒等式

$$(x+y\sqrt{2})(z+w\sqrt{2})=(xz+2yw)+(yz+xw)\sqrt{2}$$

が成り立つので，$x+y\sqrt{2}$ という形の数は積について閉じていることがわかる。

次に，共役を用いて $x+y\sqrt{2}$ のノルムNを

$$N(x+y\sqrt{2})=(x+y\sqrt{2})\overline{(x+y\sqrt{2})}=x^2-2y^2$$

で定めると，$\alpha=x+y\sqrt{2}$，$\beta=z+w\sqrt{2}$ に対して，これも複素共役の場合と同様に

$$N(\alpha\beta)=N(\alpha)N(\beta)$$

が成り立つ。よって，上の恒等式と合わせて $(\Longrightarrow)$ が成り立つことがわかる。

$(\Longleftarrow)$ ［定理］より明らか。 **（証明終）**

［性質2］ $x^2-2y^2=A$ が整数解をもつとき，$x^2-2y^2=-A$ も整数解をもつ。

（証明） $x^2-2y^2=-1$ が整数解 $(x,\ y)=(1,\ 1)$ をもつことと，［性質1］の $(\Longrightarrow)$ の証明よりわかる。

（証明終）

以上のことから，方程式②が整数解をもつかどうかは，$|1-8k|$ を素因数分解したときに現れる素数によって判定されることがわかる。

例えば $k=2$ とすると，$|1-8k|=15=3\cdot5$ であり，［定理］より $x^2-2y^2=3$ も $x^2-2y^2=5$ も整数解をもたない。よって，どんな自然数 n に対しても

$$(1+2+\cdots\cdots+n)+2$$

は平方数とはならない。

$k=-2$ のときは，$|1-8k|=17$ であり，17は素数で $17\equiv1 \pmod 8$ だから，［定理］より $x^2-2y^2=17$ は整数解をもつ。実際，

$$(1+2+3)+(-2)=4=2^2$$

となっている。

§3. 自然数の平方の和の場合

§2と同様に，1から n までの自然数の平方の和が平方数になる場合を考える（簡単のために $k=0$ とする）。つまり，m を自然数として，

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+n^2=m^2 \quad \cdots\cdots①$$

が成り立つとする。このとき，①を変形すると，

$$① \Longleftrightarrow \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)=m^2$$

$$\Longleftrightarrow 2\left\{\left(n+\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{4}n-\frac{1}{8}\right\}+n=6m^2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{4}(2n+1)^3-\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}=6m^2$$

$$\Longleftrightarrow (2n+1)^3-(2n+1)=6(2m)^2$$

より，方程式

$$6y^2=x^3-x \quad \cdots\cdots②$$

が，整数解をもつことになる。

ここに現れた方程式②の形で定義される図形は楕円曲線と呼ばれており，現在でも盛んに研究されている対象である。§2で現れたPell方程式は，その解の構造が完全にわかっているが，残念なことに楕円曲線上の格子点を求める（つまり方程式②の整数解を求める）一般的な方法は現在でも知られていない。

そこで，自分の頭でしばらくの間方程式②の整数解を考えてみたが，すべての整数解を求めるのは難しく，小さい整数を具体的に代入していくことにより，

$$(x,\ y)=(0,\ 0),\ (\pm1,\ 0),\ (2,\ \pm1),\ (3,\ \pm2)$$

を見つけるにとどまった。しかし，これ以外に整数解があるのかどうか気になったので，パソコンを用いて計算したところ，

$$(x,\ y)=(49,\ 140)$$

が見つかった。この解を見つけたことで，方程式②のすべての整数解を求めるという方針ではなく，すべてではないがとにかく整数解を求める，という方針で方程式②を考えてみた。

x を6と互いに素な平方数とすると，

$$y^2=x\cdot\frac{x^2-1}{6}$$

より，$\dfrac{x^2-1}{6}$ も平方数でなければならない。そこで $\dfrac{x^2-1}{6}=m^2$ とおくと，$x^2-6m^2=1$ となり，結局Pell方程式

$$x^2-6y^2=1 \quad \cdots\cdots③$$

の整数解で，x が平方数であるものを見つければよいことになった（方程式③の整数解となる x は必然的に 6 と互いに素）。

再び Pell 方程式を解くことになったが，方程式③のすべての自然数解は

$$x_l+y_l\sqrt{2}=(5+2\sqrt{6})^l \quad (l \text{ は自然数})$$

で定められる自然数 x_l，y_l を用いて

$$(x,\ y)=(x_l,\ y_l) \quad (l \text{ は自然数})$$

と表されることが知られており，§2 と同様にして，

$$x_l=\frac{1}{2}\{(5+2\sqrt{6})^l+(5-2\sqrt{6})^l\} \quad \cdots\cdots ④$$

を得る。この④において $l=2$ とすると，

$$\frac{1}{2}\{(5+2\sqrt{6})^2+(5-2\sqrt{6})^2\}=49$$

となり，パソコンを使って見つけた

$$(x,\ y)=(49,\ 140)$$

は，手計算ではこのように導けることがわかった。

さて，④において x_l がいつ平方数になるかということであるが，これがまた自分には難しく，簡単に決定できそうにない（パソコンで少し実験してみたが，$l=2$ 以外では平方数になる気配がない）。④と似た形の式としては，有名な Fibonacci 数列の一般項の式があるが，Fibonacci 数列の項で平方数であるものが決定されたのは 1960 年代になってからである。あの有名な Fibonacci 数列においてさえも，1960 年代になるまでいつ平方数になるかわからなかったということは，④がいつ平方数になるかということも簡単ではないのかもしれない。

残念ながら，方程式②の整数解をいくつか求めただけで §3 を終わることになるが，最後に得られた解 $(x,\ y)=(49,\ 140)$ と対応する自然数の平方の和を書いておく。$x=2n+1$ とおいていたので $n=24$ であり

$$1^2+2^2+\cdots\cdots+24^2=4900=70^2$$

§4. 終わりに

1 から n までの自然数の和と平方の和が，いつ平方数になるかということがふと気になり考えてみたが，Pell 方程式や楕円曲線という豊かな数学の対象が現れるとは思わなかった。特に §3 で再び Pell 方程式が出てきたところが面白かったと記憶している。

高校で扱う数学を用いて素朴に設定した問題が Pell 方程式や楕円曲線に繋がったことで，改めて高校数学の奥の深さを実感することとなった。

（追記） 日頃お世話になっている，現在は退職された元教員に本稿を見せた。すると，最後の整数解 $(x,\ y)=(49,\ 140)$ について，この解は楕円曲線 $6y^2=x^3-x$ 上の 2 点 $(2,\ -1)$，$(3,\ 2)$ を通る直線 $y=3x-7$ と，もとの楕円曲線の交点として得られることを指摘された。

一般に，有理数係数の楕円曲線上に 2 つの有理点が存在すれば，その 2 点を通る直線ともとの楕円曲線との交点は（3 次方程式の解と係数の関係により）再び有理点となる。

この有名な事実は，楕円曲線について調べたときに得ていたのだが，何故か今までまったく気付かなかった。ここに記して，感謝を申し上げたい。

《参考文献》

〔1〕 山本芳彦　数論入門　岩波書店

〔2〕 松田繁，渡辺明子　A Math Teacher Prepares Ⅰ
日本女子大学附属高等学校研究紀要　第 29 号

〔3〕 奇跡の楕円曲線と 144
http://fibonacci-freak.hatenablog.com/entry/2017/07/20/112303

〔4〕 144：フィボナッチ平方数
http://integers.hatenablog.com/entry/2015/12/18/000000

（神奈川県立生田高等学校）