エジプト分数の一考察

内藤（ないとう）　康正（やすまさ）

§1．奇数分母の単位分数の和

整数の性質の応用に

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$$

を満たす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ を求める問題があります。また，

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{7}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$$

を満たす異なる自然数の組 $(a,\ b,\ c,\ d)$ を求める問題が整数問題を扱う書物の第１問にありました（参考文献〔１〕）。これらは

$1+2+3=6$

$1+2+4+7+14=28$

の両辺をそれぞれ 6，28 で割れば

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=1,\ \frac{1}{28}+\frac{1}{14}+\frac{1}{7}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1$$

のように解の１つが見つかります。これは 6，28 が完全数であることを利用したものです。この，有理数を単位分数の和で表す「エジプト分数の問題」の類題を自作していくうちに，分母がすべて奇数のものがなかなか現れないことに気がつきました。分母がすべて偶数のものについては

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1=2$$

の両辺を２で割るなどして簡単に作ることができます。そこで，不定方程式

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}=1 \qquad \cdots\cdots⓪$$

を満たす異なる奇数の組 $(a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n)$ について調べてみることにしました。

いざ始めてみると分母を奇数に限定するだけで想像以上に難易度は上がりましたが，⓪を満たす奇数の組が存在するだけでなく，徐々に制約を加えたり条件を変えながら問題を発展させることができました。課題研究等の探求型学習の教材として，高校に入学したばかりの予備知識の少ない生徒でも自らテーマを開拓しながら冒険できるテーマだと感じました。

類似の先行研究も多数あると思いますが，これまで当たり前のように授業をしていた約数の列挙，個数や総和の計算について，自分自身「初めて活用した」という実感もあり，問題形式にまとめて紹介させていただくこととしました。

§2．解の存在

問題１

$\displaystyle\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_n}=1$ を満たす異なる正の奇数の組 $(a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n)$ はあるか？

そもそものスタートであるこの問題１が大きな第一関門でした。答えがあるとわかっている問題集とは，この時点で一味もふた味も違います。思いつきの試行錯誤では解が見つからず，以前別のエジプト分数問題に取り組んでいたときに

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24} \ \text{や}\ \frac{1}{20}=\frac{1}{38}+\frac{1}{76}+\frac{1}{95}$$

といった単位分数への分解を手がかりに考察した経験から，$\dfrac{2}{mn}$ や $\dfrac{4}{mn}$ を奇数分母の単位分数の和に分解する公式，しかもできれば複数通りの和に直せる公式を作り，利用してみることにしました。

（公式）　$m,\ n,\ k,\ l$ を奇数とする。

$\begin{cases} mn=2k-1 \\ m+n=2l \end{cases}$ のとき

$$\frac{2}{mn}=\frac{1}{k}+\frac{1}{kmn}=\frac{1}{lm}+\frac{1}{ln}$$

$\begin{cases} mn=4k-1 \\ m+n=4l \end{cases}$ のとき

$$\frac{4}{mn}=\frac{1}{k}+\frac{1}{kmn}=\frac{1}{lm}+\frac{1}{ln}$$

この公式によって，例えば次のような分解が得られます。$(m,\ n)=(3,\ 7)$，$(5,\ 7)$ からは

・$\dfrac{2}{21}=\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{231}=\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{35}$

・$\dfrac{4}{35}=\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{315}=\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{21}$

また，$(m,\ n)=(5,\ 9)$，$(3,\ 15)$ から

・$\dfrac{2}{45}=\dfrac{1}{23}+\dfrac{1}{1035}=\dfrac{1}{35}+\dfrac{1}{63}=\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{135}$

という具合です。これらを用いたところ，次のようにして⓪の解 $(n=11)$ が見つかりました。

$$
\begin{aligned}
1&=\frac{1+3+5+6}{15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1+4+4+5}{35}\\
&=\frac{1}{\underline{15}}+\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{315}\right)\\
&\qquad\qquad+\left(\frac{1}{\underline{15}}+\frac{1}{21}\right)+\frac{1}{7}\\
&=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{9}+\frac{1}{315}+\frac{1}{21}+\frac{1}{7}+\frac{2}{\underline{15}}\\
&=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{9}+\frac{1}{315}+\frac{1}{21}+\frac{1}{7}+\frac{1+2+3}{45}\\
&=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{9}+\frac{1}{315}+\frac{1}{21}+\frac{1}{7}\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{45}+\left(\frac{1}{23}+\frac{1}{1035}\right)+\frac{1}{15}
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{23}\\
&\qquad+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{315}+\frac{1}{1035}=1
\end{aligned}
$$

……①

です。

これで，ともかく奇数分母のみの異なる単位分数の和で 1 を表すことができましたから，次に和の項数 n を減らすことにしました。

§3.　9 項の和

問題 2

$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_n}=1$ を満たす異なる正の奇数の組 $(a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n)$ で，n ができるだけ小さいものを見つけよ。

先ほどと同様のアイデアで，$1=\dfrac{35}{35}=\cdots$ とすると，次のように $n=9$ の解を得ます。

$$
\begin{aligned}
1&=\frac{4+4+5+7+15}{35}\\
&=\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{315}\right)+\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{21}\right)+\frac{1}{7}+\frac{1}{5}+\frac{3}{7}\\
&=\frac{1}{9}+\frac{1}{315}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{7}+\frac{1}{5}+\frac{7+2}{21}\\
&=\frac{1}{9}+\frac{1}{315}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{7}+\frac{1}{5}\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{231}\right)
\end{aligned}
$$

すなわち

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}\\
&\qquad\qquad+\frac{1}{231}+\frac{1}{315}=1
\end{aligned}
$$

……②

です。

ここでいったん，n の最小値を検討することにします。まず，分母が奇数の単位分数 8 個の和は分子が偶数になり，全体として和が 1 になり得ないことがわかりますから $n=7$ の可能性を検討します。

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}=1.021\cdots>1$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}=1.013\cdots>1$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}=1.003\cdots>1$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}=0.989\cdots<1$$

から，7 項の和が存在するとすれば

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_7}=1$$

となるはずです。

$$\frac{1}{a_6}+\frac{1}{a_7}=0.121789\cdots$$

ということですが，これを満たす 13 以上の異なる奇数の組 $(a_6,\ a_7)$ はなく，さらに調べると $n\leqq6$ も不適とわかりました。つまり，⓪を満たす分解では項数は $n=9$ が最小で，②は問題 2 の解の 1 つだったことになります。

そこで今度は $n=9$ に固定して，a_9 をより小さくすることを考えます。

§4. 最小の a_9

> **問題 3**
> $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_9}=1$ を満たす異なる正の奇数の組(a_1, a_2, ……, a_9)で，a_9 ができるだけ小さいものを見つけよ。ただし，
> $a_1<a_2<\cdots\cdots<a_9$ とする。

ここでは，その数自身を除く正の約数を単に約数と呼ぶことにします。②の両辺に分母の最小公倍数

$$3^2\times5\times7\times11=3465$$

を掛けると

$$1155+693+495+385+315+231+165+15+11=3465$$

となります。左辺の各項は 3465 の約数(すべてではない)です。

・3465 の約数は 10 個以上
・その総和が 3465 より大きい(過剰数である)
・その和が 3465 になる 9 個の約数の組がある

という状況です。これを踏まえて最小の a_9 を探すために 3465 の約数を列挙すると

1, 3, 5, 7, 9, 11, 15, 21, 33, 35, 45, 55, 63, 77, 99, 105, 165, 231, 315, 385, 495, 693, 1155

の 23 個。その和は

$$(1+3+9)(1+5)(1+7)(1+11)-3465=4023$$

です。過剰数としての過剰分は

$$4023-3465=558$$

なので，23 個の約数から，その和が 558 になるように 14 個を選びます。例えば

1, 3, 5, 7, 9, 11, 21, 33, 35, 45, 55, 63, 105, 165

を選ぶと，これら以外の約数 9 個の和が

$$1155+693+495+385+315+231+99+77+15=3465$$

となり，両辺を 3465 で割って

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{231}=1 \quad \cdots\cdots③$$

が得られます。他にも 2 組見つかりましたが，③の $a_9=231$ が最小でした。

§5. 奇数の過剰数

より小さい a_9 を探すために，3465 より小さな奇数の過剰数を調べたところ，奇数の過剰数が非常に少ないことを知りました(参考文献〔2〕)。

過剰数としての最初の奇数は $3^3\times5\times7=945$ だそうです。945 の約数は

1, 3, 5, 7, 9, 15, 21, 27, 35, 45, 63, 105, 135, 189, 315

の 15 個で，和は 975，過剰分は $975-945=30$ です。この過剰分を $1+3+5+21$ とすることで

$$315+189+135+105+63+45+35+27+15+9+7=945$$

となり，両辺を 945 で割って

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{27}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{105}+\frac{1}{135}=1 \quad \cdots\cdots④$$

が得られました。11 項になってしまいましたが，末項の分母を 135 まで小さくすることができました。ただ，945 や，他のいくつかの過剰数からも項数 9 の分解は得られませんでした。問題 3 の答えは(確定ではないですが)$a_9=231$ ということで打ち切ることにしました。かわりに，項数にこだわることをやめて，分母がすべて 2 桁以内に収まる分解を探すこととしました。

§6. 2 桁以内の分母

> **問題 4**
> $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_n}=1$ を満たす異なる正の奇数の組(a_1, a_2, ……, a_n)で，
> $1<a_1<a_2<\cdots\cdots<a_n<100$ を満たすものを見つけよ。

小さい順に奇数の過剰数をあたることにしました。確かに奇数の過剰数は稀で

$$3^3\times5\times7=945,\ 3^2\times5^2\times7=1575$$
$$3^2\times5\times7^2=2205,\ 3^4\times5\times7=2835$$

と続き，この次が(③で用いた)

$$3^2\times5\times7\times11=3465$$

となります。これら 5 つの過剰数について調べたところ，最良の結果として 3465 から

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{33}+\frac{1}{35}+\frac{1}{45}+\frac{1}{55}+\frac{1}{77}+\frac{1}{105}=1 \quad \cdots\cdots⑤$$

が得られたものの，あと一歩ですべての分母を 2 桁に収めることはできませんでした。

§7. 素数の分母を増やせるか

欲を出して，分母が素数の項をどこまで増やせるかというテーマを考えます。これまで同様，奇数の過剰数を利用します。11 項の分解で半数以上の 6 項の分母に素数が現れるものを目標にしました。

> **問題 5**
>
> $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{11}}=1$ を満たす異なる正の奇数の組 $(a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_{11})$ で，6 つの素数を含む組を見つけよ。

そもそも利用する過剰数の素因数に 6 つ以上の素数がないといけないことと，小さい素因数 3 がたくさんある方が小さい約数を小刻みに作れるので，11 個の約数の和の微調整がしやすいだろうという判断のもと

$$3^2\times5\times7\times11\times13\times17=765765$$

で試しました。運よく過剰数だったようで，この約数のうち，分母の素数のために必要な 6 数は

$$\frac{765765}{3}=255255,\quad \frac{765765}{5}=153153,$$

$$\frac{765765}{7}=109395,\quad \frac{765765}{11}=69615,$$

$$\frac{765765}{13}=58905,\quad \frac{765765}{17}=45045$$

これらの和が 691368 です。あと 5 つの約数 A，B，C，D，E で和が $765765-691368$，すなわち

$$A+B+C+D+E=74397$$

となるものを見つければよい。強欲算法によって，(上の 6 数を避けながら) A，B，C，D，E を次のように定めます。

$$765765\div74397=10.2\cdots$$

から，10 より大きい最初の約数 15 をとり

$$A=765765\div15=51051$$

以下同様に，$74397-51051=23346$ で

$$765765\div23346=32.8\cdots$$

から約数 33 をとり

$$B=765765\div33=23205$$

次に $23346-23205=141$ で，

$$765765\div141=5430.9\cdots$$

から約数 6435 をとり，

$$C=765765\div6435=119$$

$141-119=22$ で，あとは $22=17+5$ から

$$D=17,\ E=5$$

すると

$$255255+153153+109395+69615+58905+45045+51051+23205+119+17+5=765765$$

です。これを 765765 で割ると

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{33}+\frac{1}{6435}+\frac{1}{45045}+\frac{1}{153153}=1 \quad \cdots\cdots⑥$$

11 項中，半数以上の分母に素数を使うことに成功しました。素数を分母にもつ項の割合はさらにどのくらいまで増やせるのか。また，すべての項の分母が素数という分解はあるのかなど，話題は尽きませんが，電卓片手の手作業の限界が近づいてきたところできりをつけることにしました。

ここまでの取り組みを整理すると

・問題 2 の解 ($n=9$) は全部で何組あるのか。

・問題 4 は解が存在するのか

は未解決です。3465 より大きい奇数の過剰数は（おそらく）無数にあるのだと思いますが，これらについて理詰めで調べることはできませんでした。

エジプト分数の問題は概して一般性に乏しく，生徒向け教材には向かない印象がありましたが，①～⑥を改めて眺めればにわかには信じられない等式です。この「信じられない等式を自分で作る」という目標のもと，最小の過剰数 945 などは約数の個数や過剰分も手ごろで，平素は解き方優先で手を動かしてくれない生徒たちも無理なく取り組める試行錯誤の練習になりそうです。

また，特に⑥を見つける作業はパソコンによる全数調査のプログラムを組む練習にもなるとは思いますが，パソコンに頼らずに済ませるにはどうすればよいか智慧を絞るという活動も忘れてはならないと感じます。数学の問題を解くときに，問題文を読むやいなや計算を始める生徒がいます。そして行くと

ころまで行って，気がつくと迷路に入っているのです。その意味で問題 5 は，「大局的な見通しを立ててから解き始める」「ある程度結果を予想する」という，問題との向き合い方の指導に活用できると感じました。

§8. 結びにかえて

さて，エジプト分数の問題については次のような未解決の難問があります。

> **問題 6** （エルデシュ―シュトラウスの予想）
> 次の命題は正しいか。
> 「3 以上の任意の自然数 n に対して
> $$\frac{4}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \qquad \cdots\cdots ⑦$$
> を満たす自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ が存在する」

試しに来たる $n=2021$ 年について⑦を考えたところ（本稿の設定である奇数の分母という条件をはずすことになりますが），手ごたえのあるパズルになりました。$2021=43\times47$ ですから

$$\frac{4}{2021}=\frac{1}{43\times44}+\frac{1}{44\times45}+\frac{1}{45\times46}+\frac{1}{46\times47}$$

という異なる 4 項の分解は比較的簡単に見つかります。3 項への分解は，部分分数分解

$$\frac{4}{3k-1}=\frac{1+3}{3k-1}=\frac{1}{3k-1}+\frac{(3k-1)+1}{k(3k-1)}$$
$$=\frac{1}{3k-1}+\frac{1}{k}+\frac{1}{k(3k-1)}$$

によって，$k=674$ として

$$\frac{4}{2021}=\frac{1}{674}+\frac{1}{2021}+\frac{1}{1362154}$$

を得ます。ただ，右辺にも 2021 が現れるので少しつまらない。そこで $\frac{4}{8k-3}$ の部分分数分解を考えると

$$\frac{4}{2021}=\frac{1}{506}+\frac{1}{511313}+\frac{1}{1022626}$$

という分解に至ります。
さらに

$$\frac{1}{2021A}+\frac{1}{2021B}+\frac{1}{AB}=\frac{A+B+2021}{2021AB}=\frac{4}{2021}$$

とすると，$A+B+2021=4AB$ から

$$(4A-1)(4B-1)=8085=3\times5\times7^2\times11$$

となり，$A=14,\ B=37$ とすれば

$$\frac{4}{2021}=\frac{1}{518}+\frac{1}{74777}+\frac{1}{28294}$$

を，$A=4,\ B=135$ とすれば

$$\frac{4}{2021}=\frac{1}{540}+\frac{1}{8084}+\frac{1}{272835}$$

という分解も得ることができました。

《参考文献》

〔1〕 日本評論社　チャレンジ整数の問題 199
水上勉　著　　黒川重信　監修
〔2〕 東京図書　数の辞典
D. ウェルズ　著
芦ケ原伸之・滝沢清　訳

（東京都立立川高等学校）