三角形に潜む不等式の一般化

精松(あべまつ)　祐介(ゆうすけ)

§1. はじめに

3 辺の長さが a, b, c である三角形に関する不等式の証明問題は，常に三角不等式

$$a+b-c>0,\ b+c-a>0,\ c+a-b>0 \quad \cdots\cdots(※)$$

を条件下において証明しなければいけない。筆者は『大－小≧0』の発想で証明しようと試みたが，非常に複雑になりすぎて途方に暮れた。そこで

$$\text{Ravi 変換：}\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \\ z+x=c \end{cases}$$

を使う。この Ravi 変換の素晴らしさは

$$x=\frac{a-b+c}{2},\ y=\frac{a+b-c}{2},\ z=\frac{b+c-a}{2}$$

より，何と三角不等式(※)が

$$x>0,\ y>0,\ z>0 \quad \cdots\cdots(※※)$$

に同値な条件として置き換わる部分である。これによって例えば「相加・相乗平均の関係」が使える可能性も出てくるが，ここでは「オイラーの不等式(三角形の外接円と内接円の半径の比の最小値)」や「イェンゼン(Jensen)の不等式」を利用して，三角形に潜む不等式の一般化を考えてみる。

§2. オイラーの不等式を使った証明

> **問題(ア)**：三角形の 3 つの辺の長さを a, b, c とし，$a+b+c=2s$ とおくとき，次の不等式を証明せよ。
>
> $$\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\geqq 6 \qquad (\text{大分医大})$$

(証明)　$\dfrac{a}{s-a}$, $\dfrac{b}{s-b}$, $\dfrac{c}{s-c}>0$ より，相加・相乗平均の関係から

$$\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\geqq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}} \quad \cdots\cdots(★)$$

ここで，この三角形の面積，外接円の半径，内接円の半径をそれぞれ T, R, r とおくと次が成り立つ。

$$\begin{cases} T=\dfrac{abc}{4R} & \cdots\cdots① \\ T=\dfrac{1}{2}r(a+b+c)=sr & \cdots\cdots② \\ T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ (\text{ヘロンの公式}) & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①より　$abc=4TR \quad \cdots\cdots④$

②，③より　$(s-a)(s-b)(s-c)=\dfrac{T^2}{s}=\dfrac{T^2}{\dfrac{T}{r}}=Tr \quad \cdots\cdots⑤$

(★)に④，⑤を代入すると

$$\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\geqq 3\sqrt[3]{\frac{4TR}{Tr}}=3\sqrt[3]{\frac{4R}{r}} \quad \cdots\cdots(★★)$$

それでは，$\dfrac{R}{r}$ の最小値を求める。

正弦定理より　$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

よって　$a=2R\sin A$, $b=2R\sin B$, $c=2R\sin C \quad \cdots\cdots⑥$

①，②，⑥より

$$\frac{8R^3\sin A\sin B\sin C}{4R}=Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$$

ゆえに　$\dfrac{R}{r}=\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{2\sin A\sin B\sin C} \quad \cdots\cdots⑦$

ここで

$$\begin{aligned}
&\sin A+\sin B+\sin C \\
&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(\pi-A-B) \\
&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+\sin(A+B) \\
&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A+B}{2} \\
&=2\sin\frac{A+B}{2}\left(\cos\frac{A+B}{2}+\cos\frac{A-B}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$=2\sin\frac{A+B}{2}$$

$$\times 2\cos\frac{\frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}}{2}\cos\frac{\frac{A+B}{2}-\frac{A-B}{2}}{2}$$

$$=4\sin\frac{\pi-C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\quad\cdots\cdots⑧$$

$\sin A\sin B\sin C$

$$=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\times 2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\times 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cdots\cdots⑨$$

⑦，⑧，⑨より

$$\frac{R}{r}=\frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{16\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=\frac{1}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\quad\cdots\cdots⑩$$

$\sin\frac{A}{2}$，$\sin\frac{B}{2}$，$\sin\frac{C}{2}>0$ より，相加・相乗平均の関係から

$$\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\geqq\sqrt[3]{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}\quad\cdots\cdots⑪$$

一方，関数 $f(x)=\sin x$ は，$0\leqq x\leqq\pi$ で上に凸な関数であるから，イェンゼン(Jensen)の不等式により

$$\frac{f\left(\frac{A}{2}\right)+f\left(\frac{B}{2}\right)+f\left(\frac{C}{2}\right)}{3}\leqq f\left(\frac{\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}}{3}\right)$$

$$\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\leqq\sin\frac{A+B+C}{6}$$

$$=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots⑫$$

⑩，⑪，⑫より

$$\frac{R}{r}=\frac{1}{4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}$$

$$\geqq\frac{1}{4\left(\frac{\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}}{3}\right)^3}\geqq\frac{1}{4\left(\frac{1}{2}\right)^3}=2$$

よって　$\frac{R}{r}\geqq 2$　…⑬　(オイラーの不等式)

(★★)，⑬より

$$\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\geqq 3\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}\geqq 3\sqrt[3]{4\cdot 2}=6$$

(証明終)

§3. 問題(ア)の一般化

$$\frac{a}{s-a}+\frac{b}{s-b}+\frac{c}{s-c}\geqq 3\sqrt[3]{\frac{4R}{r}}$$

かつ

$\frac{R}{r}\geqq 2$　…(☆)　(オイラーの不等式)

である事実は，非常にシンプルで興味深い。オイラーの不等式を使って問題(ア)の一般化を考えてみる。

> **問題(ア)の一般化：** 三角形の 3 つの辺の長さを a，b，c とし，$a+b+c=2s$ とおくとき，次の不等式が成り立つ。
> μ が 0 以上の実数のとき
> $$\left(\frac{a}{s-a}\right)^\mu+\left(\frac{b}{s-b}\right)^\mu+\left(\frac{c}{s-c}\right)^\mu\geqq 3\cdot 2^\mu$$

(証明)　$\left(\frac{a}{s-a}\right)^\mu$，$\left(\frac{b}{s-b}\right)^\mu$，$\left(\frac{c}{s-c}\right)^\mu>0$ であるから，相加・相乗平均の関係とオイラーの不等式により

$$\left(\frac{a}{s-a}\right)^\mu+\left(\frac{b}{s-b}\right)^\mu+\left(\frac{c}{s-c}\right)^\mu$$

$$\geqq 3\sqrt[3]{\left\{\frac{abc}{(s-a)(s-b)(s-c)}\right\}^\mu}$$

$$=3\sqrt[3]{\left(\frac{4R}{r}\right)^\mu}\geqq 3\sqrt[3]{8^\mu}=3\cdot 2^\mu$$

(証明終)

§4. オイラーの不等式が使えないタイプの不等式の一般化の例

> **問題(イ)：** 三角形の 3 つの辺の長さを a，b，c とし，$a+b+c=2s$ とおくとき，次の不等式が成り立つ。ただし，ρ は 0 以上の実数とする。
> $$\begin{cases} 0\leqq\rho\leqq 1 \text{ のとき} \\ \dfrac{a^\rho+b^\rho+c^\rho}{(s-a)^\rho+(s-b)^\rho+(s-c)^\rho}\geqq 2^\rho \\ \rho\geqq 1 \text{ のとき} \\ \dfrac{a^\rho+b^\rho+c^\rho}{(s-a)^\rho+(s-b)^\rho+(s-c)^\rho}\leqq 2^\rho \end{cases}$$

（証明）

$\rho=0$，1 のとき，左辺＝右辺となり適する。

$0<\rho<1$ のとき，

$$2^{\rho}\{(s-a)^{\rho}+(s-b)^{\rho}+(s-c)^{\rho}\}\leqq a^{\rho}+b^{\rho}+c^{\rho}$$

と同値である。

ここで，Ravi 変換をすると

$$\begin{cases} x+y=a \\ y+z=b \quad \cdots\cdots① \\ z+x=c \end{cases}$$

①より　$x+y+z=s$ かつ $x,\ y,\ z>0$　……②

①，②より

$$2^{\rho}(x^{\rho}+y^{\rho}+z^{\rho})\leqq(x+y)^{\rho}+(y+z)^{\rho}+(z+x)^{\rho}$$

を証明すればよい。

$0<\rho<1$ のとき，関数 $f(X)=(2X)^{\rho}$（$X>0$）は上に凸な関数であるから，イェンゼン(Jensen)の不等式により

$$\begin{cases} \dfrac{f(x)+f(y)}{2}\leqq f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \quad \cdots\cdots③ \\ \dfrac{f(y)+f(z)}{2}\leqq f\left(\dfrac{y+z}{2}\right) \quad \cdots\cdots④ \\ \dfrac{f(z)+f(x)}{2}\leqq f\left(\dfrac{z+x}{2}\right) \quad \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

③，④，⑤の辺々を加えると

$$f(x)+f(y)+f(z)\leqq f\left(\frac{x+y}{2}\right)+f\left(\frac{y+z}{2}\right)+f\left(\frac{z+x}{2}\right)$$

$$(2x)^{\rho}+(2y)^{\rho}+(2z)^{\rho}\leqq(x+y)^{\rho}+(y+z)^{\rho}+(z+x)^{\rho}$$
$$2^{\rho}(x^{\rho}+y^{\rho}+z^{\rho})\leqq(x+y)^{\rho}+(y+z)^{\rho}+(z+x)^{\rho}$$
$$2^{\rho}\{(s-a)^{\rho}+(s-b)^{\rho}+(s-c)^{\rho}\}\leqq a^{\rho}+b^{\rho}+c^{\rho}$$

よって　$\dfrac{a^{\rho}+b^{\rho}+c^{\rho}}{(s-a)^{\rho}+(s-b)^{\rho}+(s-c)^{\rho}}\leqq 2^{\rho}$

$\rho>1$ のとき，関数 $g(X)=(2X)^{\rho}$（$X>0$）は下に凸な関数より，イェンゼン(Jensen)の不等式から

$$\begin{cases} \dfrac{g(x)+g(y)}{2}\geqq g\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \quad \cdots\cdots③' \\ \dfrac{g(y)+g(z)}{2}\geqq g\left(\dfrac{y+z}{2}\right) \quad \cdots\cdots④' \\ \dfrac{g(z)+g(x)}{2}\geqq g\left(\dfrac{z+x}{2}\right) \quad \cdots\cdots⑤' \end{cases}$$

③′，④′，⑤′の辺々を加えると

$$g(x)+g(y)+g(z)\geqq g\left(\frac{x+y}{2}\right)+g\left(\frac{y+z}{2}\right)+g\left(\frac{z+x}{2}\right)$$

$$(2x)^{\rho}+(2y)^{\rho}+(2z)^{\rho}\geqq(x+y)^{\rho}+(y+z)^{\rho}+(z+x)^{\rho}$$
$$2^{\rho}(x^{\rho}+y^{\rho}+z^{\rho})\geqq(x+y)^{\rho}+(y+z)^{\rho}+(z+x)^{\rho}$$
$$2^{\rho}\{(s-a)^{\rho}+(s-b)^{\rho}+(s-c)^{\rho}\}\geqq a^{\rho}+b^{\rho}+c^{\rho}$$

よって　$\dfrac{a^{\rho}+b^{\rho}+c^{\rho}}{(s-a)^{\rho}+(s-b)^{\rho}+(s-c)^{\rho}}\leqq 2^{\rho}$

（証明終）

§5. 最後に

特に，問題(イ)において，$\rho=\dfrac{1}{2}$ のとき

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{s-a}+\sqrt{s-b}+\sqrt{s-c}}\geqq\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2s-2a}+\sqrt{2s-2b}+\sqrt{2s-2c}\leqq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$

よって　$\sqrt{a+b-c}+\sqrt{b+c-a}+\sqrt{c+a-b}$
$$\leqq\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$$
……(☆☆)

(☆☆)の証明問題は，実際に 1996 年 アジア太平洋数学オリンピック (APMO) 第 5 問で出題されている。三角形というシンプルな図形の中に様々な不等式が存在し，興味深い。今後も三角形に潜む不等式のあらゆる証明方法を模索し続けたい。

《参考文献》

〔1〕 第 70 回県算数・数学教育研究会(姶良・伊佐)大会高等学校研究発表「三角形の不等式」～辺の長さの不等式と Ravi 変換～白坂　繁(著)

〔2〕 高校数学の美しい物語 ～定期試験から数学オリンピックまで 800 記事～ https://mathtrain.jp/kakomon_2

（鹿児島県　鹿児島玉龍高等学校）