$\int_1^e (\log x)^n dx$（n は自然数）の値について

～入試問題の一般化～

西元(にしもと)　教善(のりよし)

§1．はじめに

不定積分 $\int \log x\,dx$ は部分積分法を使って鮮やかに求められ，生徒に強烈な印象を与える代表格と言っても過言ではないだろう。それまでの代表的な関数 $x^\alpha\ (\alpha \neq -1)$，$\dfrac{1}{x}$，$\sin x$，$\cos x$，$e^x$，$a^x$ は

$$x^\alpha=\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)',\ \frac{1}{x}=(\log x)',\ \sin x=(-\cos x)',$$

$$\cos x=(\sin x)',\ e^x=(e^x)',\ a^x=\left(\frac{a^x}{\log a}\right)'$$

のように導関数がそのような関数になることが即座にわかるものであったが，多くの生徒にとって $\log x=(\ ?\ )'$ となるのが普通であろう。これは $\int \tan x\,dx$ の場合も同様である。

不定積分 $\int \log x\,dx$ は部分積分法を使って

$$\int \log x\,dx=x(\log x-1)+C\ （C は積分定数）$$

となるから，定積分 $\int_1^e \log x\,dx$ の値は

$$\int_1^e \log x\,dx=\Big[x(\log x-1)\Big]_1^e=0-(-1)=1$$

である。

ここで，$I_n=\int_1^e (\log x)^n dx$（$n$ は自然数）として定積分の数列 $\{I_n\}$ を考えると，初項 $I_1=\int_1^e \log x\,dx=1$ であり，定積分の部分積分法から隣接 2 項間の漸化式 $I_{n+1}=e-(n+1)I_n$ を得る。

実際，次のようになるからである。

$$I_{n+1}=\int_1^e (\log x)^{n+1}dx=\int_1^e (x)'(\log x)^{n+1}dx$$

$$=\Big[x(\log x)^{n+1}\Big]_1^e-\int_1^e x\{(\log x)^{n+1}\}'dx$$

$$=e-\int_1^e x(n+1)(\log x)^n(\log x)'dx$$

$$=e-(n+1)\int_1^e x(\log x)^n\frac{1}{x}dx=e-(n+1)I_n$$

すると，漸化式 $I_1=1$，$I_{n+1}=e-(n+1)I_n$ から一般項 $I_n=\int_1^e (\log x)^n dx$ が n の式としてどのように表されるかを考えるのは当然の流れであろう。

大学入試では，大分大が I_4 を求める出題をしている。

なお，$I_1=1$，$I_2=e-2$，$I_3=6-2e$，$I_4=9e-24$ であるから，$I_n=a_n+b_ne$（a_n，b_n は整数）と表される。そこで，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ についてその一般項を求めることにする。

§2．a_n を n の式で表す

まず，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の漸化式を求めよう。

$I_1=1$，$I_{n+1}=e-(n+1)I_n$ より

$$a_1+b_1e=1,$$

$$a_{n+1}+b_{n+1}e=e-(n+1)(a_n+b_ne)$$

$$=-(n+1)a_n+\{1-(n+1)b_n\}e$$

である。

一般に a，b，a'，b' が有理数，c が無理数のとき，$a+bc=a'+b'c \iff a=a',\ b=b'$ であるから

$$a_1=1,\ b_1=0,$$

$$a_{n+1}=-(n+1)a_n,\ b_{n+1}=1-(n+1)b_n$$

である。

$\{a_n\}$ については，$a_1=1$，$a_{n+1}=-(n+1)a_n$ より，$a_n=(-1)^{n-1}n!$ である。

$I_1=1$，$I_2=e-2$，$I_3=6-2e$，$I_4=9e-24$ より $a_1=1$，$a_2=-2$，$a_3=6$，$a_4=-24$ であるから確かに一致している。

§3. b_n を n の式で表す～ただし，総和記号 $\sum$ を使って～

§2で，a_n は $a_n=(-1)^{n-1}n!$ のように簡単な n の式で表せたので，次に b_n も n の式で表すことを試みる。ただし，初めに断わっておくが，総和記号を使うことを認めることにする。また，そのままではすぐに一般項を求めることが困難なので，次のような手順で，階差数列が作れる形に置き換えを繰り返す。

置き換え1　（隣接2項の和とするための置き換え）

$b_1=0$，$b_{n+1}=1-(n+1)b_n$ であるから，$b_n=n!c_n$ とおくと，$b_{n+1}=(n+1)!c_{n+1}$ である。

よって，$c_1=0$，$(n+1)!c_{n+1}=1-(n+1)n!c_n$ より

$$(n+1)!c_{n+1}+(n+1)!c_n=1$$

両辺を $(n+1)!$ で割ると　$c_{n+1}+c_n=\dfrac{1}{(n+1)!}$

置き換え2　（階差数列とするための置き換え）

次に，$d_n=(-1)^n c_n$ とおくと，$d_1=-c_1=0$，$c_n=(-1)^n d_n$ であるから

$$(-1)^{n+1}d_{n+1}+(-1)^n d_n=\frac{1}{(n+1)!}$$

両辺に $(-1)^{n+1}$ を掛けて，$d_{n+1}-d_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$

つまり　$d_{k+1}-d_k=\dfrac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}$

$n\geqq 2$ のとき，$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ n-1$ のときの和をとって

$$\begin{aligned}d_n-d_1&=\sum_{k=1}^{n-1}(d_{k+1}-d_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\\&=\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\\&=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+1\end{aligned}$$

$d_1=0$ より，$n\geqq 2$ のとき　$d_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+1$

この式において $d_1=\displaystyle\sum_{k=1}^{1}\frac{(-1)^k}{k!}+1=-1+1=0$ であるから，$n=1$ のときも成り立つ。

よって，n を自然数とするとき

$$d_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+1$$

である。

$c_n=(-1)^n d_n$ より

$$c_n=(-1)^n\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+1\right\}$$

$b_n=n!c_n$ より

$$b_n=(-1)^n n!\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+1\right\}\quad\cdots\cdots(*)$$

である。

$I_1=1$，$I_2=e-2$，$I_3=6-2e$，$I_4=9e-24$ より

$b_1=0$，$b_2=1$，$b_3=-2$，$b_4=9$ であるが，$(*)$において

$$b_1=(-1)^1 1!\left\{\sum_{k=1}^{1}\frac{(-1)^k}{k!}+1\right\}=-(-1+1)=0$$

$$\begin{aligned}b_2&=(-1)^2 2!\left\{\sum_{k=1}^{2}\frac{(-1)^k}{k!}+1\right\}\\&=2\left\{\left(-1+\frac{1}{2}\right)+1\right\}=2\cdot\frac{1}{2}=1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_3&=(-1)^3 3!\left\{\sum_{k=1}^{3}\frac{(-1)^k}{k!}+1\right\}\\&=-6\left\{\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+1\right\}=-6\cdot\frac{1}{3}=-2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_4&=(-1)^4 4!\left\{\sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^k}{k!}+1\right\}\\&=24\left\{\left(-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right)+1\right\}\\&=24\cdot\frac{12-4+1}{24}=9\end{aligned}$$

であるから一致している。

$I_n=a_n+b_n e$，$a_n=(-1)^{n-1}n!$，

$b_n=(-1)^n n!\left\{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+1\right\}$ であるから

$$\begin{aligned}I_n&=(-1)^{n-1}n!+(-1)^n n!\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+1\right\}e\\&=(-1)^{n-1}n!\left[1-\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+1\right\}e\right]\end{aligned}$$

つまり

$$\int_1^e(\log x)^n dx=(-1)^{n-1}n!\left[1-\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+1\right\}e\right]$$

あるいは

$$\int_1^e(\log x)^n dx=(-1)^{n-1}n!\left\{1-\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}e\right\}$$

である。

総和記号 $\sum$ を使って表しているので，n の式として表したと言い難いが，とりあえずこのような式で表すことができた。

§4. まとめ

大分大学の入試問題は，次のような問い方であった。

> 自然数 n について，$I_n=\int_1^e(\log x)^n dx$ とする。
>
> (1)　I_1 を求めよ。
>
> (2)　I_{n+1} を I_n を用いて表せ。
>
> (3)　I_4 を求めよ。

一見したとき，(3)は「I_n を求めよ。」の誤植ではないかと思った。数列 $\{I_n\}$ について(1)で初項を(2)で隣接 2 項間の漸化式を求めさせているので，(3)では一般項 I_n を求めさせるのが当然の流れであると早合点したからである。

$I_n=a_n+b_ne$（a_n，b_n は整数）とおき，$\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の漸化式を求めると $a_1=1$，$a_{n+1}=-(n+1)a_n$，$b_1=0$，$b_{n+1}=1-(n+1)b_n$ が得られ，$\{a_n\}$ の一般項はすぐ求められたが，漸化式では少しの違い（$a_{n+1}=-(n+1)a_n$ と $b_{n+1}=1-(n+1)b_n$）であるにも関わらず，$\{b_n\}$ の一般項には手こずった。

そこで，苦肉の策ではあるが，$\{a_n\}$ のように単純な n の式として表すことは断念し，「総和記号」を使うことを認めて捻出することにした。

そのままでは求められないので，変形を繰り返し階差数列に持ち込み，総和記号を使って何とか表せた。なるほど(3)を「I_n を求めよ。」としてないことがよくわかった次第である。

《b_n を求める流れ》

$b_1=0$，$b_{n+1}=1-(n+1)b_n$　$(b_{n+1}+(n+1)b_n=1)$

⇩　**$b_n=n!c_n$ とおく**

$c_1=0$，$c_{n+1}+c_n=\dfrac{1}{(n+1)!}$

⇩　**$d_n=(-1)^nc_n$ とおき，**
両辺に $(-1)^{n+1}$ を掛ける

$d_1=0$，$d_{n+1}-d_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$ $\{d_n\}$ の階差数列

⇩　**$\{d_n\}$ の階差数列**
から d_n を求める。

$$d_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+1$$

⇩　**$c_n=(-1)^nd_n$ より，**
両辺に $(-1)^{n+1}$ を掛ける

$$c_n=(-1)^n\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+1\right\}$$

⇩　**$b_n=n!c_n$ より，**
両辺に $n!$ を掛ける

$$b_n=(-1)^nn!\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}+1\right\}$$

あるいは，$b_n=(-1)^nn!\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$

《参考文献》

〔1〕　改訂版　クリアー数学演習Ⅲ　受験編，㉔
定積分，Example 24，p50，数研出版

（山口県立高森高等学校）