3 次関数のグラフと直線で囲まれた図形の面積
～あえて定積分の公式を作成～

宮田（みやた）　毅一郎（きいちろう）

§1. はじめに…公式を作成してみることの意義

2019 年度の入試問題，首都大学東京・前期文系や福井大・教育前期において
「定数 α，β に対し，

$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

を示せ」

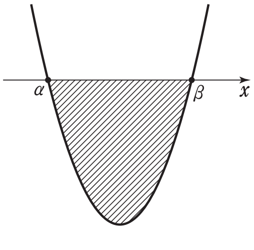
という有名な通称 “$\frac{1}{6}$ 公式” に関する出題がされた。放物線と x 軸や直線，2 つの放物線で囲まれた部分の面積を求める際に用いる公式であり，正しい使い方も覚えておいてほしい公式の 1 つである。公式は使えても式変形を工夫して公式を導くことができない生徒は意外に多いと思われる。

曲線と接線で囲まれた部分の面積を求める際に，他にも有名な通称 “$\frac{1}{12}$ 公式”

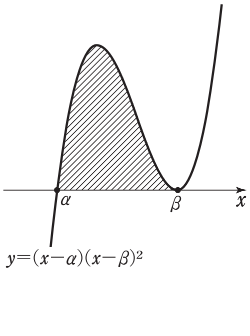
$$\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

といった便利な公式が使える問題がある一方，いろいろなグラフと面積の和を求める問題に関しては，被積分関数に絶対値記号がついているような問題では場合分けをして計算するという問題などもある。

既習の知識を組み合わせ，式変形を工夫して，公式を導ける力もつける中で，式の持つ本質を考えてほしいと思っている。



$y=(x-\alpha)(x-\beta)$



$y=(x-\alpha)(x-\beta)^2$

§2. よくある面積の問題

曲線と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和の問題として後述のような問題がある。

問題 1　曲線 $y=x(x-1)(x-3)$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和 S を求めよ。

解答　曲線 $y=x(x-1)(x-3)$ と x 軸との交点の x 座標は，方程式

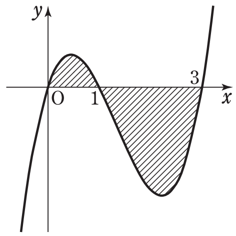
$x(x-1)(x-3)=0$

の解である。これを解くと

$x=0,\ 1,\ 3$

グラフは右の図のようになり　$0\leqq x\leqq 1$ で $y\geqq 0$

$1\leqq x\leqq 3$ で $y\leqq 0$



よって，求める面積の和 S は

$$S=\int_0^1(x^3-4x^2+3x)\,dx+\int_1^3\{-(x^3-4x^2+3x)\}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{4}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2\right]_1^3=\frac{37}{12}$$ 答

これを踏まえ，先日の授業の問題演習で扱った問題の 1 つが次の問題である。

問題 2　関数 $y=2x^3-x^2-2x+1$ のグラフと x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

解答　$2x^3-x^2-2x+1=(x+1)(2x-1)(x-1)$

であるから，求める面積の和 S は

$$S=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}(2x^3-x^2-2x+1)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\{-(2x^3-x^2-2x+1)\}\,dx=\cdots=\frac{71}{48}$$

x 軸との交点の x 座標に分数が現れ，煩雑な計算以外本質は変わらない。

しかし，多くの生徒から「簡単に計算できる公式はないのか」との質問が出る。

「3次関数のグラフと直線で囲まれた図形の面積」の問題に関して一見無駄な公式を新たに作り，また使うより，場合分けをして計算するのが王道である。しかし，あえて公式作りの過程を経ることにより，問題を解く際の新たな切り口を見出し，教材研究の一助となればと考える。

§3. 面積公式作成

問題1を一般化すると，次のようになる。

問題3　曲線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ $(\alpha<\beta<\gamma)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

方針　右下図の S_1，S_2 および $S=S_1+S_2$ をそれぞれ α，β，γ を用いて表す。

また，$\beta-\alpha=l_1$，$\gamma-\beta=l_2$ として，$S=S_1+S_2$ を l_1，l_2 の式で表す。

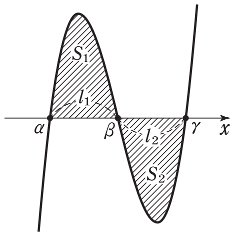
解答　方程式

$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$

を解くと　$x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$

グラフは右の図のようになり　$\alpha\leqq x\leqq\beta$ で $y\geqq0$

$\beta\leqq x\leqq\gamma$ で $y\leqq0$



よって，求める面積 S は

$$S=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx+\int_\beta^\gamma\{-(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\}\,dx$$

$$=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx-\int_\beta^\gamma(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx$$

ここで，

$$S_1=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx$$

$$S_2=-\int_\beta^\gamma(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx$$

とおくと，$S=S_1+S_2$ となる。

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)^2dx=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)^2(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4$$

であり，また，

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$=(x-\alpha)(x-\beta)\{(x-\beta)+(\beta-\gamma)\}$$
$$=(x-\alpha)(x-\beta)^2+(\beta-\gamma)(x-\alpha)(x-\beta)$$

より

$$\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\,dx$$
$$=\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)^2dx+(\beta-\gamma)\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4+\frac{1}{6}(\gamma-\beta)(\beta-\alpha)^3$$
$$=\frac{1}{12}l_1{}^4+\frac{1}{6}l_2l_1{}^3$$

よって　$S_1=\dfrac{1}{12}l_1{}^4+\dfrac{1}{6}l_2l_1{}^3$

同様に　$S_2=\dfrac{1}{12}l_2{}^4+\dfrac{1}{6}l_1l_2{}^3$

よって　$S=S_1+S_2$

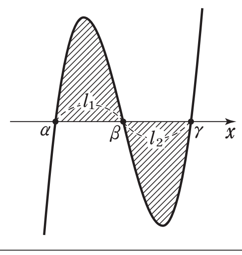
$$=\frac{1}{12}l_1{}^4+\frac{1}{6}l_2l_1{}^3+\frac{1}{6}l_1l_2{}^3+\frac{1}{12}l_2{}^4$$
$$=\frac{1}{12}(l_1{}^4+2l_1{}^3l_2+2l_1l_2{}^3+l_2{}^4)$$

以上のことより，次のような面積公式を作ることができる。

面　積　公　式

曲線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ $(\alpha<\beta<\gamma)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S は，$\beta-\alpha=l_1$，$\gamma-\beta=l_2$ とすると

$$S=\frac{1}{12}(l_1{}^4+2l_1{}^3l_2+2l_1l_2{}^3+l_2{}^4)$$



問題1の確認

$l_1=1$，$l_2=2$ とおくと

$$S=\frac{1}{12}(1^4+2\cdot1^3\cdot2+2\cdot1\cdot2^3+2^4)$$
$$=\frac{1}{12}(1+4+16+16)=\frac{37}{12}$$

面積 S が $l_1{}^2l_2{}^2$ の項がない l_1 と l_2 の4次式で表すことができる。このことは，後で扱う問題において面積 S が a の4次関数で表された式でも，現れる項が少なくなり最大・最小問題を解く際に計算しやすくなる一因になっている。以下，便宜的に，“M公式”と名付けておく。

問題1のレベルであればM公式を使うまでもな

い。しかし，M 公式を利用することにより，煩雑な積分計算において，検算するのには便利なケースもあると思われる。

以下，M 公式から導かれる事実を考察する。

§4. 面積公式からわかること

問題 4　$\gamma-\alpha=l$（一定値）の場合，曲線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ $(\alpha<\beta<\gamma)$ と x 軸で囲まれた部分の面積が最小値をとるときの α，β，γ の関係式を答えよ。

解答　面積公式において，$l_1=kl$，$l_2=(1-k)l$ $(0<k<1)$ とおくと

$$S=\frac{1}{12}l^4\{k^4+2k^3(1-k)+2k(1-k)^3+(1-k)^4\}$$
$$=\frac{1}{12}l^4(-2k^4+4k^3-2k+1)$$

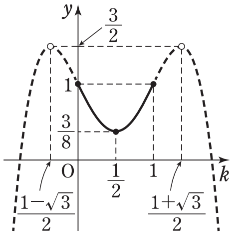
$f(k)=-2k^4+4k^3-2k+1$ とおくと

$$f'(k)=-8k^3+12k^2-2$$
$$=-2(4k^3-6k^2+1)$$
$$=-2(2k-1)(2k^2-2k-1)$$

$0<k<1$ において $f'(k)=0$ とすると　$k=\dfrac{1}{2}$

$0<k<1$ における $f(k)$ の増減表は次のようになる。

k	0	…	$\frac{1}{2}$	…	1
$f'(k)$		−	0	+	
$f(k)$		↘	極小 $\frac{3}{8}$	↗	

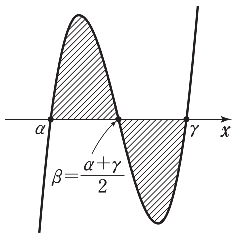


よって，$f(k)$ は $k=\dfrac{1}{2}$ で最小値 $\dfrac{3}{8}$ をとる。

このとき　$l_1=l_2=\dfrac{1}{2}l$，$\beta-\alpha=\gamma-\beta=\dfrac{1}{2}(\gamma-\alpha)$

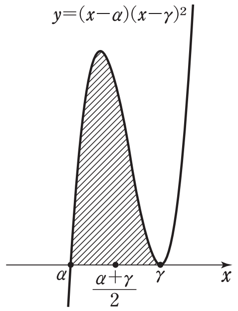
すなわち　$\beta=\dfrac{1}{2}(\alpha+\gamma)$　**終**

曲線 $y=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ $(\alpha<\beta<\gamma)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S は $\beta-\alpha=l_1$，$\gamma-\beta=l_2$ とすると，$l_1=l_2$ のとき $S_1=S_2$ となり，S は最小値をとる。



3 次関数のグラフが点対称な図形であり，点 $(\beta,\ 0)$ が 3 次関数のグラフの変曲点である。このことから，3 次関数のグラフを直線で分割したときの面積の和の問題を解く時のヒントとなる。

先の問題では，$\alpha<\beta<\gamma$ であるので，$k=0$，1 の場合を除いた。$\alpha=\beta$ や $\beta=\gamma$ になることを認めると，例えば，$\beta=\gamma$ の場合は右図のようになり，面積が最大になる。



§5. 面積公式の性質からわかること

M 公式を用いて次の問題を考察する。

問題 5　［2012 名城大］

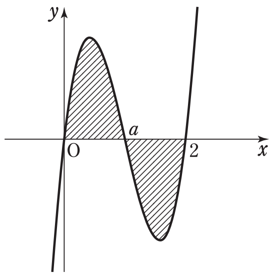
曲線 $y=12x^3-12(a+2)x^2+24ax$ $(0\leqq a\leqq 2)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。

(1)　$S(a)$ を a を用いて表せ。

解答　$y=12x^3-12(a+2)x^2+24ax$
$$=12x\{x^2-(a+2)x+2a\}$$
$$=12x(x-a)(x-2)$$

$0\leqq a\leqq 2$ であるから，曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 $S(a)$ は M 公式より

$$S(a)=12\cdot\frac{1}{12}\{a^4+3\cdot a^3\cdot(2-a)+3\cdot a\cdot(2-a)^3+(2-a)^4\}$$
$$=-2a^4+8a^3-16a+16$$



(2)　$S(a)$ の最大値と最小値を求めよ。

解答　$S'(a)=-8a^3+24a^2-16=-8(a^3-3a^2+2)$
$$=-8(a-1)(a^2-2a-2)$$

$S'(a)=0$ とすると　$a=1,\ 1\pm\sqrt{3}$

$0\leqq a\leqq 2$ における $S(a)$ の増減表は次のようになる。

a	0	…	1	…	2
$S'(a)$		−	0	+	
$S(a)$	16	↘	6	↗	16

よって，$S(a)$ は

$a=0$，2 で最大値 16，$a=1$ で最小値 6

をとる。

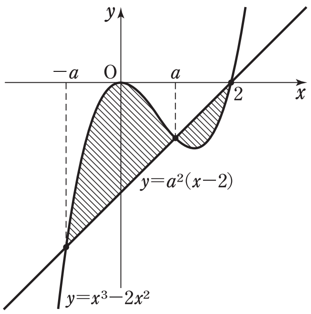
$\boxed{\text{参考}}$ 先の M 公式の考察より

$$a=\frac{0+1}{2}=1 \text{ のとき最小値をとる。}$$

§6. 3次関数のグラフと直線で囲まれた2つの図形の面積を等しくする係数決定

このタイプの問題は，感覚的に直線が3次関数のグラフの変曲点(グラフの対称点)を通れば答えがわかる。

問題 6　$0<a<2$ とする。曲線 $y=x^3-2x^2$ と直線 $y=a^2(x-2)$ で囲まれた2つの図形の面積が等しくなるような定数 a の値を求めよ。



$\boxed{\text{解答}}$ $x^3-2x^2=a^2(x-2)$ を解くと

$$x^2(x-2)-a^2(x-2)=0$$

よって　$(x^2-a^2)(x-2)=0$

ゆえに　$(x+a)(x-a)(x-2)=0$

したがって　$x=\pm a,\ 2$

$0<a<2$ であるから　$-a<a<2$

したがって，曲線 $y=x^3-2x^2$ と直線 $y=a^2(x-2)$ は，図のように異なる3点で交わる。

この曲線と直線で囲まれた2つの図形の面積が等しくなるためには

$$\int_{-a}^{a}\{(x^3-2x^2)-a^2(x-2)\}dx$$

$$=\int_{a}^{2}\{a^2(x-2)-(x^3-2x^2)\}dx$$

よって　$\displaystyle\int_{-a}^{2}(x^3-2x^2-a^2x+2a^2)dx=0$

左辺の積分を計算すると

$$\text{左辺}=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3-\frac{a^2}{2}x^2+2a^2x\right]_{-a}^{2}$$

$$=\frac{a^4}{4}+\frac{4}{3}a^3+2a^2-\frac{4}{3}$$

ゆえに　$\dfrac{a^4}{4}+\dfrac{4}{3}a^3+2a^2-\dfrac{4}{3}=0$

すなわち　$3a^4+16a^3+24a^2-16=0$

因数定理を用いて左辺を因数分解すると

$(a+2)^3(3a-2)=0$

$0<a<2$ であるから　$a=\dfrac{2}{3}$

$\boxed{\text{解説}}$ $y=x^3-2x^2$

$y'=3x^2-4x$

$y''=6x-4=2(3x-2)$

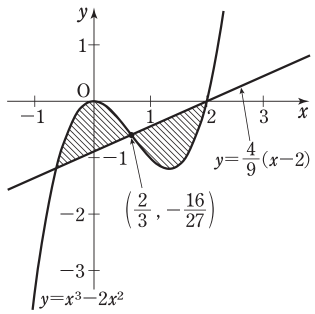
$y''=0$ のとき　$x=\dfrac{2}{3}$

変曲点は $\left(\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{16}{27}\right)$

直線 $y=a^2(x-2)$ がこの点を通るから

$-\dfrac{16}{27}=-\dfrac{2}{3}a^2$ より　$a^2=\dfrac{4}{9}$

$0<a<2$ であるから　$a=\dfrac{2}{3}$



問題4のような問題の面積の和の問題は変曲点がキーになりそうだが，問題6のような共有点の端点の1つが固定，もう片方が変化するような問題では，直線が変曲点を通るとき，面積の和は最小なのだろうか。M 公式の性質 "$\gamma-\alpha=l$ (一定値)" を考慮しないとどうなるのだろうか。

§7. 面積問題の注意事項

先の問題を利用し，次の問題を解答していく。

問題 7　[2015 大同大]

$0<a<2$，$f(x)=x^3-2x^2$ とする。

(1) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a^2(x-2)$ の交点の x 座標を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a^2(x-2)$ で囲まれる2つの部分の面積の和を $S(a)$ とする。$S(a)$ を求めよ。

(3) $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

問題 8　(問題 7 の改題を一般化)

$0<a<k$, $f(x)=x^3-kx^2$ とする。

(1)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a^2(x-k)$ の交点の x 座標を求めよ。

解答　$x=\pm a$, k

(2)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a^2(x-k)$ で囲まれる 2 つの部分の面積の和を $S(a)$ とする。$S(a)$ を求めよ。

解答　M 公式より

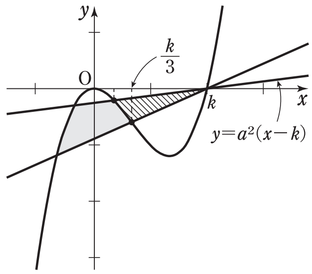
$$S(a)=\frac{1}{12}\{(2a)^4+3\cdot(2a)^3\cdot(k-a)+3\cdot 2a\cdot(k-a)^3+(k-a)^4\}$$
$$=\frac{1}{12}(-3a^4+24ka^3-6k^2a^2+k^4)$$
$$S'(a)=-3a^3+6ka^2-ka^2$$
$$=-3a(a^2-6k+k^2)$$

$0<a<k$ において $S'(a)=0$ とすると

$$a=(3-2\sqrt{2})k$$

$a=(3-2\sqrt{2})k$ のとき面積和は最小値をとる。

計算より，面積和は最小値をとるとき，直線 $y=a^2(x-k)$ は曲線 $y=f(x)$ の変曲点 $\left(\frac{1}{3}k,\ -\frac{2}{27}k^3\right)$ を通らない。



増分≠減分なら，直線を右または左に回転させることにより，面積和を減らすことができる。ゆえに，面積和が最小となるのは，増分＝減分のときである。

参考　交点の x 座標 $-a$, a, k について

$$k-a=\frac{1}{\sqrt{2}}\{k-(-a)\}$$

より，$a=(3-2\sqrt{2})k$ として求めることもできる。

この問題のように，3 次関数のグラフと直線との交点の 1 端点だけが固定される，つまり公式の性質における“$\gamma-\alpha=l$ (一定値)”という条件(交点間の距離)が一定値でない限りは，M 公式は求積に使えても，最小値を求める問題には使えない。

かなりの回り道をしたが,「曲線と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積和の問題」では問題 5 のタイプと問題 7 のタイプが本質的に異なる，だからこそ注意深く扱わなければならない。

(石川県立小松明峰高等学校)