1項おきのフィボナッチ数列とリュカ数列

松田　康雄

§0. はじめに

本稿の目的は，1項おきのフィボナッチ数列と1項おきのリュカ数列を双曲線の中の円の半径および中心の y 座標として表すことである。

以下，n は整数とする。

§1. フィボナッチ数列とリュカ数列

「フィボナッチ数列」$\{f_n\}$ $(n \geqq 1)$ は，漸化式

$$f_1=f_2=1,\ f_{n+2}-f_{n+1}-f_n=0$$

で定まる次のような数列である：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，377，610，987，……

「リュカ数列」$\{l_n\}$ $(n \geqq 1)$ は，漸化式

$$l_1=1,\ l_2=3,\ l_{n+2}-l_{n+1}-l_n=0$$

で定まる次のような数列である：

1，3，4，7，11，18，29，47，76，123，199，322，521，843，1364，……

それぞれの一般項は

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^n-\beta^n),\ l_n=\alpha^n+\beta^n$$

$$\left(\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

と表される。$\alpha\beta=-1$ なので，$\{f_n\}$ と $\{l_n\}$ の間には，関係式

$$l_n{}^2=5f_n{}^2+4(-1)^n \qquad \cdots\cdots①$$

が成り立つ。(〔1〕)

ここで，1項おきのフィボナッチ数列 $\{f_{2n+1}\}$，$\{f_{2n+2}\}$ および1項おきのリュカ数列 $\{l_{2n+1}\}$，$\{l_{2n+2}\}$ (以上 $n \geqq 0$) を考える。いずれも漸化式

$$a_{n+2}-3a_{n+1}+a_n=0 \qquad \cdots\cdots②$$

を満たす。

§2. 双曲線の中の円

方程式

$$x^2+(y-c_n)^2=r_n{}^2 \qquad \cdots\cdots③$$

$(0 \leqq c_n < c_{n+1},\ r_n>0)$ で表される円 C_n $(n \geqq 0)$ が，方程式

$$x^2-ay^2=b \qquad \cdots\cdots④$$

$(a>0,\ b \neq 0)$ で表される双曲線 H と接し，円 C_n と円 C_{n+1} が互いに外接するとき，円 C_n を「双曲線 H の中の円」と呼ぼう。

この円 C_n の中心の y 座標 c_n と半径 r_n に関して次の定理が成り立つ。

定理1.

(i) $$c_n=\sqrt{\frac{a+1}{a}(r_n{}^2-b)} \qquad \cdots\cdots⑤$$

(ii) $\{r_n\}$ は次の漸化式を満たす。

$$r_1=(2a+1)r_0+2ac_0, \qquad \cdots\cdots⑥$$

$$r_{n+2}-2(2a+1)r_{n+1}+r_n=0 \qquad \cdots\cdots⑦$$

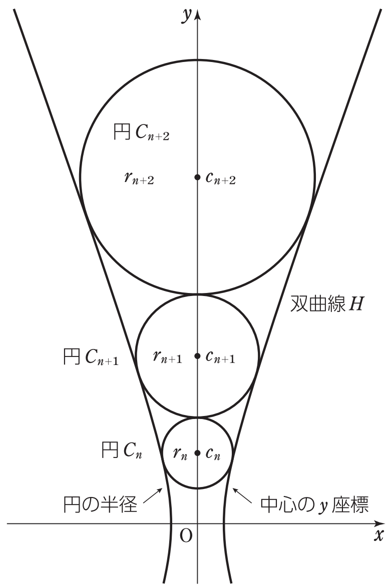

図1　双曲線の中の3個の円

証明. 双曲線 H と円 C_n が接するので，③と④から x を消去してできる y の2次方程式

$$(a+1)y^2-2c_ny+c_n{}^2-r_n{}^2+b=0$$

は重解をもつ。(判別式)$=0$ から

$$ac_n{}^2=(a+1)(r_n{}^2-b) \qquad \cdots\cdots ⑧$$

$c_n \geqq 0$，$a>0$，$b>0$ のとき $r_n \geqq b$ より，⑤が示される。

円 C_n と円 C_{n+1} が外接するので，2円の中心間の距離と半径の和が等しいから

$$c_{n+1}-c_n=r_{n+1}+r_n \qquad \cdots\cdots ⑨$$

⑧から

$$c_{n+1}{}^2-c_n{}^2=\frac{a+1}{a}\,(r_{n+1}{}^2-r_n{}^2) \qquad \cdots\cdots ⑩$$

⑨，⑩から

$$c_{n+1}+c_n=\frac{a+1}{a}\,(r_{n+1}-r_n) \qquad \cdots\cdots ⑪$$

⑨，⑪から

$$r_{n+1}=(2a+1)r_n+2ac_n \qquad \cdots\cdots ⑫$$

⑫から⑥が，⑨，⑫から⑦が示される。 □

§3. フィボナッチ数列とリュカ数列と双曲線の中の円

1項おきのフィボナッチ数列とリュカ数列と双曲線の中の円に関して次の定理が成り立つ。

定理2． $n \geqq 0$ とする。

(i) 円 $C_n : x^2+(y-l_{2n+1})^2=f_{2n+1}{}^2$ は双曲線 $H_1 : x^2-\dfrac{y^2}{4}=\dfrac{4}{5}$ の中の円である。(図2)

(ii) 円 $C_n : x^2+(y-l_{2n+2})^2=f_{2n+2}{}^2$ は双曲線 $H_2 : x^2-\dfrac{y^2}{4}=-\dfrac{4}{5}$ の中の円である。(図3)

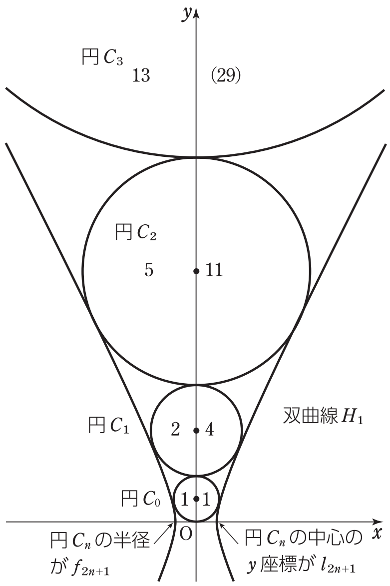

図2　奇数番目の項の場合

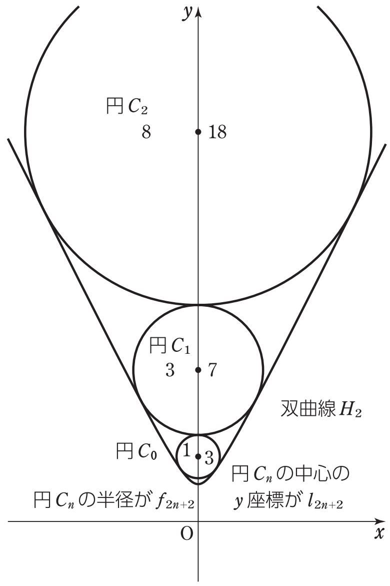

図3　偶数番目の項の場合

証明. (i) 定理1で，$a=\dfrac{1}{4}$，$b=\dfrac{4}{5}$ および $r_0=f_1=1$ とする。⑤から　$c_0=1$

⑥から　$r_1=2=f_3$

漸化式⑦と②が一致するので $r_n=f_{2n+1}$ が成り立つ。⑤から

$$c_n=\sqrt{5r_n{}^2-4}=\sqrt{5f_{2n+1}{}^2-4}$$

なので，①から，$c_n=l_{2n+1}$ が成り立つ。

(ii)も同様に証明できる。 □

§4. おわりに

2つの数列があって，それらを定める3項間の漸化式が同じで，初項と第2項が一致すれば，その2つの数列のすべての項が一致する。これが定理2の肝だと思う。

双曲線の中の円にフィボナッチ数列とリュカ数列という有名な数列が同時に現れるのは何か不思議な感じがする。

《参考資料》

〔1〕 中村滋，フィボナッチ数の小宇宙，日本評論社，2002年

〔2〕 松田康雄，円と放物線の縁，数研通信 No.77，2013年，6-7

〔3〕 松田康雄，双曲線に外接，内接する円について，数学セミナー 2014年11月号，57-58