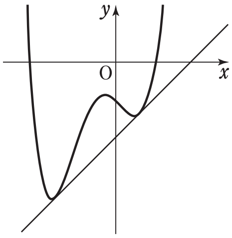
# 複接線定理

小金澤（こがねざわ）　貴弘（たかひろ）

## §1. 複接線の初歩的な求め方



右図のように，4 次関数のグラフと異なる 2 点で接する接線を複接線という。

2 重接線と呼ばれることもあるが，複接線の方が一般的らしい。

すぐに思いつく初歩的な求め方は，$f(x)-(mx+n)=(x-s)^2(x-t)^2$ とおいて係数比較か，$x=t$ における接線の方程式と連立し，整理した後，$(x-t)^2$ で割った商について判別式 $D=0$ として解く，くらいであろう。ただ，いずれも煩雑で，計算量も少なくない。

そこで，次の定理を紹介しよう。

## §2. 複接線定理

> **定理**　複接線をもつ 4 次関数 $y=f(x)$ において，第 3 次導関数 $f'''(x)$ の値が 0 となる $x$ の値を $\gamma$ とすると，複接線の傾きは $f'(\gamma)$ である。

## §3. 幾何的証明っぽいもの

複接線の式ともとの 4 次関数の式を連立させた方程式は，異なる 2 つの 2 重解をもつ。この方程式を整理して，新たに 4 次関数 $g(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ を定義すると，$y=g(x)$ のグラフは直線 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ に関して対称である。4 次関数であることと，ロルの定理により，微分係数が 0 となる点が $\alpha<x<\beta$ にただ 1 つ存在することになるが，対称性から，

$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ と特定でき，これが $\gamma$ に他ならない。

$\gamma$ は導関数 $g'(x)$ の変曲点の $x$ 座標に等しいから，$g'''(\gamma)=f'''(\gamma)=0$ が成り立ち，複接線の傾き $f'(\gamma)$ を得る。

## §4. 複接線定理の証明

**証明**　複接線の方程式を $y=mx+k$ とする。これともとの 4 次関数の式 $y=f(x)$ を連立させた方程式が，異なる 2 つの 2 重解 $\alpha$，$\beta$ をもつとすると，

$f(x)=a(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+mx+k\,(a\neq 0)$ とおけ

$$f'(x)=2a(x-\alpha)(x-\beta)(2x-\alpha-\beta)+m$$

$$f''(x)=2a[6\{x^2-(\alpha+\beta)x\}+\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2]$$

$$f'''(x)=12a(2x-\alpha-\beta)$$

$f'''(x)=0$ から　$\gamma=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

よって　$f'(\gamma)=f'\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=m$　**終**

## §5. 複接線定理の利用例

実際に複接線の方程式を求めるには，傾きだけでなく切片も必要になる。係数比較をするより，完全平方式を目指してたすきがけをする方が楽である。その際，傾きを調べてから処理するとよい。

**例**　曲線 $y=x^4-4x^3-2x^2+13x+5$ の複接線。

$f(x)=x^4-4x^3-2x^2+13x+5$ とおくと

$$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+13$$

$$f''(x)=12x^2-24x-4$$

$$f'''(x)=24x-24$$

$f'''(x)=0$ から　$x=1$

$f'(1)=1$ であるから，複接線の傾きは 1。複接線の方程式を $y=x+k$ とすると，方程式 $f(x)=x+k$ すなわち $x^4-4x^3-2x^2+12x+5-k=0$ は，異なる 2 つの 2 重解をもつから，完全平方式となる。

以下のようにたすきがけを行うと，$x^3$，$x$ の係数に着目して $5-k=(-3)^2$ から $k=-4$ を得る。

$$\begin{array}{ccc} 1 & -2 & ? \\ 1 & -2 & ? \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{ccc} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{array}$$

よって，求める複接線の方程式は　$y=x-4$

(静岡県立掛川西高等学校)