表計算ソフトで遊ぶ

木村（きむら）　嘉宏（よしひろ）

§1. 表計算ソフトの活用

表計算ソフトエクセルを用いてさまざまな計算をする中で，気づいたことを紹介する。

自然数の平方を縦横に並べ，平方数どうしの差を計算した表を作る。そこから，結果が平方数になる組み合わせを拾い出すことにより，ピタゴラス数(直角三角形を作る3辺の長さ)が見つかる。

20以下の自然数について表を作れば，3組のピタゴラス数 (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17) が拾える。

7と1の平方の差は，$7^2-1^2=3\cdot4^2$ となり，平方数の3倍になる。

このような2数の組み合わせは多くあり，互いに素な組として (2, 1), (7, 1), (13, 11), (19, 13), …… が拾える。

ここで直感の命ずるまま，素数に注目することにした。

§2. 6k+1型の素数の性質

以下，特に断らない限り k, m, n を自然数とする。

$6k+1$ の形で表せる200までの素数は，次の21個である。

7, 13, 19, 31, 37, 43, 61, 67, 73, 79, 97, 103, 109, 127, 139, 151, 157, 163, 181, 193, 199

これらすべてについて，次のことが確かめられた。

> $6k+1$ の形で表せる200以下の素数を l とするとき，適当な m, n を選べば
> $$l^2-m^2=3n^2$$
> すなわち
> $$l^2=m^2+3n^2$$
> が成り立つ。

等式を満たす $(l,\ m,\ n)$ を次に示す。

(7, 1, 4), (13, 11, 4), (19, 13, 8), (31, 23, 12), (37, 13, 20), (43, 11, 24), (61, 37, 28), (67, 61, 16), (73, 23, 40), (79, 71, 20), (97, 1, 56), (103, 97, 20), (109, 107, 12), (127, 73, 60), (139, 11, 80), (151, 143, 28), (157, 59, 84), (163, 131, 56), (181, 157, 52), (193, 191, 16), (199, 193, 28)

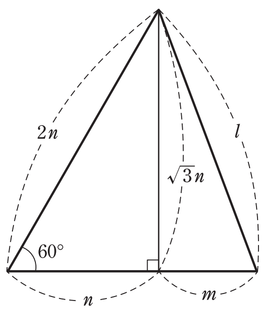
§3. 図形的な意味

§2で示した $(l,\ m,\ n)$ は，直角三角形と関連付けられる。

> $l^2=m^2+3n^2$ を満たす l, m, n について，l, m, $\sqrt{3}\,n$ を3辺とする三角形は，斜辺が l の直角三角形である。

また，3辺が n, $2n$, $\sqrt{3}\,n$ の三角形の辺の比は $1:2:\sqrt{3}$ であり，60°の角を含む直角三角形である。

これら2つの直角三角形を合わせて，3辺の長さがすべて整数で，60°の角をもつ三角形を作図することができる。



§4. 60° の角をもつ 3 辺すべてが整数である三角形

§3 で述べたことから，次のことがいえる。

> $l^2=m^2+3n^2$ を満たす l，m，n について，$2n$，$m+n$，l を 3 辺とする三角形は，60° の角をもつ。

(証明)

△ABCにおいて，

$a=2n$，$b=m+n$，$c=l$ とすると

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(2n)^2+(m+n)^2-l^2}{2\cdot 2n\cdot(m+n)}$$
$$=\frac{4n^2+m^2+2mn+n^2-(m^2+3n^2)}{4n(m+n)}$$
$$=\frac{2n^2+2mn}{4n(m+n)}=\frac{2n(m+n)}{4n(m+n)}=\frac{1}{2}$$

したがって，∠C＝60° である。　**(証明終)**

§2 で示した $(l,\ m,\ n)$ の組から，

$(2n,\ m+n,\ l)$ を 3 辺とする三角形を作ると

(8, 5, 7)，(8, 15, 13)，(16, 21, 19)，
(24, 35, 31)，(40, 33, 37)，(48, 35, 43)，
(56, 65, 61)，(32, 77, 67)，(80, 63, 73)，
(40, 91, 79)，(112, 57, 97)，(40, 117, 103)，
(24, 119, 109)，(120, 133, 127)，(160, 91, 139)，
(56, 171, 151)，(168, 143, 157)，(112, 187, 163)，
(104, 209, 181)，(32, 207, 193)，(56, 221, 199)
である。

§5. l，m，n の相互関係

§2 で得た $(l,\ m,\ n)$ について，次のような関係がある。

> $l=p^2+3q^2$ を満たす自然数の組 $(p,\ q)$ について
>
> $m=|p^2-3q^2|$，$n=2pq$

このことは，

$$l^2-m^2=(p^2+3q^2)^2-|p^2-3q^2|^2$$
$$=(p^2+3q^2)^2-(p^2-3q^2)^2$$
$$=12p^2q^2$$
$$=3(2pq)^2$$

であることから確かめられる。

§2 で得た $(l,\ m,\ n)$ に対応する $(p,\ q)$ は，次に示す通りである。

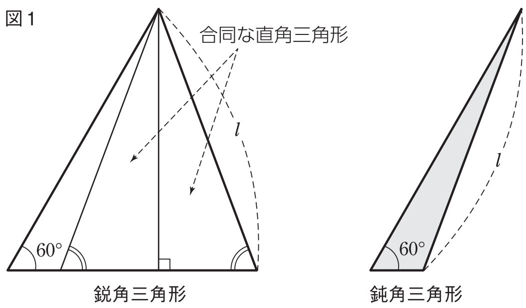
$(l,\ m,\ n)$	$(p,\ q)$
(7, 1, 4)	(2, 1)
(13, 11, 4)	(1, 2)
(19, 13, 8)	(4, 1)
(31, 23, 12)	(2, 3)
(37, 13, 20)	(5, 2)
(43, 11, 24)	(4, 3)
(61, 37, 28)	(7, 2)
(67, 61, 16)	(8, 1)
(73, 23, 40)	(5, 4)
(79, 71, 20)	(2, 5)
(97, 1, 56)	(7, 4)
(103, 97, 20)	(10, 1)
(109, 107, 12)	(1, 6)
(127, 73, 60)	(10, 3)
(139, 11, 80)	(8, 5)
(151, 143, 28)	(2, 7)
(157, 59, 84)	(7, 6)
(163, 131, 56)	(4, 7)
(181, 157, 52)	(13, 2)
(193, 191, 16)	(1, 8)
(199, 193, 28)	(14, 1)

§6. 補足(その 1)

このようにして得た結果を手がかりにして，60° の角をもつ別の三角形や 120° の角をもつ三角形を見つけることができる。得られる三角形の 3 辺は，すべて自然数である。

図 1 のように，60° の角をもつ鋭角三角形の中に，60° の角をもつ鈍角三角形を作図することができる。

図 1



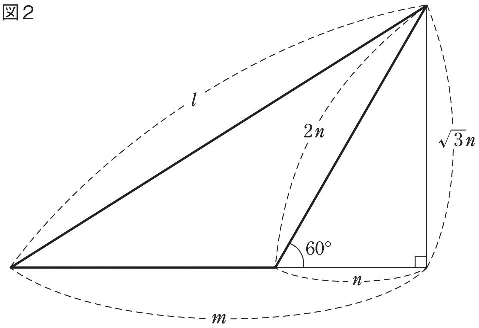
たとえば，$(l,\ m,\ n)=(7,\ 1,\ 4)$ から

$(2n,\ m+n,\ l)=(8,\ 5,\ 7)$ (鋭角三角形)

を得たが，その中に 3 辺が 8，3，7 の鈍角三角形を作図することができる。

図２のように，$m>n$ である $(l,\ m,\ n)$ から，120° の角をもつ３辺の長さがすべて整数であるような三角形を見つけることもできる。

図２



たとえば，$(l,\ m,\ n)=(13,\ 11,\ 4)$ に対して，３辺が $2n=8$，$m-n=7$，$l=13$ の三角形は

$$\frac{8^2+7^2-13^2}{2\cdot 8\cdot 7}=\frac{64+49-169}{112}=\frac{-56}{112}=-\frac{1}{2}$$

となり，120° の角をもつ。

§7．補足（その２）

$6k+1$ の形で表せる 200 以上の素数について，調べを続けることもできる。

$l=211$ について

$l=8^2+3\cdot 7^2$ であるので

$(p,\ q)=(8,\ 7)$

$m=|8^2-3\cdot 7^2|=83$，$n=2\cdot 8\cdot 7=112$

これより $(211,\ 83,\ 112)$ が得られる。

$l=223$ について

$l=14^2+3\cdot 3^2$ であるので

$(p,\ q)=(14,\ 3)$

$m=|14^2-3\cdot 3^2|=169$，$n=2\cdot 14\cdot 3=84$

これより $(223,\ 169,\ 84)$ が得られる。

$l=229$ について

$l=11^2+3\cdot 6^2$ であるので

$(p,\ q)=(11,\ 6)$

$m=|11^2-3\cdot 6^2|=13$，$n=2\cdot 11\cdot 6=132$

これより $(229,\ 13,\ 132)$ が得られる。

§8．終わりに

表計算ソフトは望遠鏡のようだと思う。使ってみると，さまざまな景色が見えてくる。

整理し得た事柄はあまりにも少ないが，素数の宇宙の広さと深遠さを垣間見れたような気がしている。

（京都府立海洋高等学校）