2重根号の計算あれこれ

内藤（ないとう）　康正（やすまさ）

§1. 偶然できた計算問題

数年前，偶然次のような計算問題ができあがりました。

$$\sqrt{4+\sqrt{13}}\sqrt{5+\sqrt{12}}-\sqrt{5+\sqrt{13}}\sqrt{4+\sqrt{3}}=?$$

計算結果は「１」で，きっかけは次のような入試問題です。

> 実数 $\alpha=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ について考える。
> (1)　α^3 を α の１次式で表せ。
> (2)　α は整数であることを示せ。
> （2011　愛知教育大）

この問題の背景は３次方程式 $y^3+py+q=0$ の解の公式

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

ですが，勘のよい生徒が

$$\sqrt[3]{5\sqrt{2}\pm7}=\sqrt[3]{(\sqrt{2}\pm1)^3}=\sqrt{2}\pm1$$

のように２重根号をはずせることに気づいてしまうことがあります。これはこれで素晴らしい洞察力だと思いますが，問題の面白みは薄らいでしまいます。そこで「個々の２重根号ははずれないが，積や和を計算するとはずれてしまう」計算問題を作れないかと考えたのです。冒頭の問題では４つある２重根号はいずれもはずれませんが，全体として計算した結果ははずれる，という仕組みです。

次の４題も同趣旨の問題です。興味をもたれた方は２重根号をはずしてみて下さい。

【問題１】　$\sqrt{2+\sqrt{6}}\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{6}}=?$

【問題２】　$\sqrt{8-2\sqrt{13}}\sqrt{4-\sqrt{3}}=?$

【問題３】　$\sqrt{7\sqrt{2}-4\sqrt{3}}-\sqrt{10\sqrt{2}-8\sqrt{3}}=?$

【番外編】　$\sqrt{10+2\sqrt{45}}=?$

冒頭の問題はこれまでも幾度か生徒に出題してきたのですが，このたび高校１年生から２通の名答が寄せられました。その紹介も兼ねて，これらの問題ができあがるまでの試みを順を追って紹介させていただこうと思った次第です。

なお，本稿では，式の中の文字が整数か有理数かなどは逐一明記せず，その都度適当に解釈していただければと思います。

§2. ２重根号がはずれる条件

まずは２重根号 $\sqrt{a+n\sqrt{p}}$ がはずれる条件（結果の根号は平方根）から考えます。２重根号 $\sqrt{a+n\sqrt{p}}$ が $\sqrt{a+n\sqrt{p}}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ のようにはずれたとします。両辺を２乗すると

$$a+n\sqrt{p}=(\alpha+\beta)+2\sqrt{\alpha\beta}$$

ですから，α，β は $\begin{cases}\alpha+\beta=a\\ 4\alpha\beta=n^2p\end{cases}$ を満たします。つまり２次方程式 $4x^2-4ax+n^2p=0$ の実数解が α，β ですが，それらがともに有理数になるのは，判別式について $a^2-n^2p=c^2$ となるときです。

逆にこのとき $\alpha=\dfrac{a+c}{2}$，$\beta=\dfrac{a-c}{2}$ とおくと

$$\begin{cases}\alpha+\beta=a\\ \alpha\beta=\dfrac{a^2-c^2}{4}=\dfrac{n^2p}{4}\end{cases}$$ から

$$(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=(\alpha+\beta)+2\sqrt{\alpha\beta}=a+n\sqrt{p}$$

となり，２重根号ははずれて

$$\sqrt{a+n\sqrt{p}}=\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$$

となります。以上を**性質１**としておきます。

> **性質１：**
> ２重根号 $\sqrt{a+n\sqrt{p}}$ がはずれる
> $$\Longleftrightarrow a^2-n^2p=c^2$$
> 具体的には $\sqrt{a+n\sqrt{p}}=\sqrt{\dfrac{a+c}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-c}{2}}$

この**性質 1** において $n=2, 1$ の場合が，通常の 2 重根号をはずす計算に相当し，次の通りです。

・$a^2-4p=c^2$ を満たす a, p, c に対して

$$\sqrt{a+2\sqrt{p}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

・$a^2-p=c^2$ を満たす a, p, c に対して

$$\sqrt{a+\sqrt{p}}=\sqrt{\frac{a+c}{2}}+\sqrt{\frac{a-c}{2}}$$

例えば $\sqrt{126+72\sqrt{3}}$ であれば $126^2-72^2\cdot 3=18^2$ から

$$\sqrt{\frac{126+18}{2}}+\sqrt{\frac{126-18}{2}}=\cdots$$

という具合に 2 重根号をはずせるので，数値が大きいときに重宝な公式です。

§3.　2 重根号の積

性質 1 で $a^2=A,\ c^2=C$ とおき，A または C が平方数でない場合を考えると，はずれない 2 重根号を別のはずれない 2 重根号の和に直す公式が得られます。特に $n=1$ として，**性質 2** とします。

> **性質 2**：$A-p=C$ のとき
>
> $$\sqrt{\sqrt{A}+\sqrt{p}}=\sqrt{\frac{\sqrt{A}+\sqrt{C}}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{A}-\sqrt{C}}{2}} \quad \cdots\cdots①$$

①を次のように変形してみます。

$$\sqrt{\sqrt{A}+\sqrt{p}}-\sqrt{\frac{\sqrt{A}+\sqrt{C}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{A}-\sqrt{C}}{2}}$$

両辺を 2 乗して整理すると

$$\sqrt{A}+\sqrt{p}+\sqrt{C}=\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{A}+\sqrt{p}}\sqrt{\sqrt{A}+\sqrt{C}}$$

となります。「個々の 2 重根号ははずれないが，積ははずれる」公式として，$p=B$ と改めて**性質 3** とします。

> **性質 3**：$A-B=C$ のとき
>
> $$\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{A}+\sqrt{B}}\sqrt{\sqrt{A}+\sqrt{C}}=\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C} \quad \cdots\cdots②$$

これは $2A=A+A=A+(B+C)$ から

$$\begin{aligned}&2(\sqrt{A}+\sqrt{B})(\sqrt{A}+\sqrt{C})\\&=2A+2\sqrt{AB}+2\sqrt{BC}+2\sqrt{CA}\\&=A+(B+C)+2\sqrt{AB}+2\sqrt{BC}+2\sqrt{CA}\\&=(\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C})^2\end{aligned}$$

という計算からも確認できます。この性質 3 で $(A, B, C)=(6, 4, 2)$ とすれば

$$\sqrt{\sqrt{6}+2}\sqrt{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{3}+\sqrt{2}+1$$

で，これが【**問題 1**】の答えです。計算問題としては，与式を計算して

$$\begin{aligned}&\sqrt{6+2\sqrt{3}+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}\\&=\sqrt{3+2+1+2\sqrt{3}+2\sqrt{2}\sqrt{3}+2\sqrt{2}}\end{aligned}$$

に気がつくかどうかが鍵となります。高校 1 年生にとっては，公式

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$$

を活かす機会になるかも知れません。2 重根号といえば教科書にある型しかはずすことができない，と決め付けてしまうのも生徒にとってはマイナスでしょう。また，

$$(\sqrt{6}+2)(\sqrt{6}+\sqrt{2})=(\sqrt{3}+\sqrt{2}+1)^2$$

ということでもあり，2 通りに因数分解できたような式の形が不思議です。

以上が【**問題 1**】についての説明です。

§4.　2 重根号の積の和

性質 1 に戻って $c^2=C$ の場合を考えます。やはり $n=1$ で考えますが，今度は式を 2 つ立てます。

$$\begin{cases}a^2-p=C\\ b^2-q=C\end{cases} \quad \cdots\cdots③$$

から 2 つの等式

$$\sqrt{a+\sqrt{p}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{C}}{2}}+\sqrt{\frac{a-\sqrt{C}}{2}} \quad \cdots\cdots④$$

$$\sqrt{b+\sqrt{q}}=\sqrt{\frac{b+\sqrt{C}}{2}}+\sqrt{\frac{b-\sqrt{C}}{2}} \quad \cdots\cdots⑤$$

を用意します。④と⑤の右辺の第 1 項を消去すべく

$$④\times\sqrt{b+\sqrt{C}}-⑤\times\sqrt{a+\sqrt{C}}$$

を行ったところ，何かが起こりそうな結果に至りました。次のようになります。

$$\begin{aligned}&\sqrt{b+\sqrt{C}}\sqrt{a+\sqrt{p}}-\sqrt{a+\sqrt{C}}\sqrt{b+\sqrt{q}}\\&=\sqrt{b+\sqrt{C}}\sqrt{\frac{a-\sqrt{C}}{2}}-\sqrt{a+\sqrt{C}}\sqrt{\frac{b-\sqrt{C}}{2}}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{b+\sqrt{C}}\sqrt{a-\sqrt{C}}-\sqrt{b-\sqrt{C}}\sqrt{a+\sqrt{C}})\end{aligned}$$

ここで 2 重根号の積 $\sqrt{b\pm\sqrt{C}}\sqrt{a\mp\sqrt{C}}$ すなわち $\sqrt{(ab-C)\pm(a-b)\sqrt{C}}$ がはずれてくれれば，面白い計算問題が得られそうです。はずれる条件は**性質 1** から $(ab-C)^2-(a-b)^2C$ が平方数であること

ですが，

$$(ab-C)^2-(a-b)^2C$$
$$=a^2b^2-2abC+C^2-(a^2-2ab+b^2)C$$
$$=a^2b^2-a^2C-b^2C+C^2=(a^2-C)(b^2-C)=pq$$

ですから（最後の変形は③から），pq が平方数であることが条件だとわかりました。

> **性質 4 ：**
> $$\begin{cases} a^2-p=C \\ b^2-q=C \end{cases}$$ で pq が平方数のとき
> 2 重根号の積 $\sqrt{b\pm\sqrt{C}}\sqrt{a\mp\sqrt{C}}$ ははずれる

早速具体的な数値で計算にかかったのですが，最初に試した

$$a=5,\ b=4,\ p=12,\ q=3,\ C=13$$

で，運よく思いがけない結果を得ることができました。

$$\begin{cases} 5^2-12=13 \\ 4^2-3=13 \end{cases}$$

で，$pq=12\times3=6^2$ です。どうぞご覧下さい。

$$\sqrt{4+\sqrt{13}}\sqrt{5+\sqrt{12}}-\sqrt{5+\sqrt{13}}\sqrt{4+\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{4+\sqrt{13}}\left(\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}+\sqrt{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}\right)$$
$$-\sqrt{5+\sqrt{13}}\left(\sqrt{\frac{4+\sqrt{13}}{2}}+\sqrt{\frac{4-\sqrt{13}}{2}}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{4+\sqrt{13}}\sqrt{5-\sqrt{13}}-\sqrt{5+\sqrt{13}}\sqrt{4-\sqrt{13}})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{7+\sqrt{13}}-\sqrt{7-\sqrt{13}})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{13}+1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{13}-1}{\sqrt{2}}\right)=1$$

まさか整数，しかも 1 になるとは予想すらできませんでしたから，あわててパソコンで計算が正しいことを確かめてしまいました。

破線部については，$\sqrt{5+\sqrt{12}}=\sqrt{5+2\sqrt{3}}$ として通常の 2 重根号をはずすのと同様に，和が 5 で積が 3 の α，β を求めると

$$\sqrt{5+\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{13}}{2}}+\sqrt{\frac{5-\sqrt{13}}{2}}$$

を得ます。この時点では 2 重根号がはずれませんが，内側の根号がすべて $\sqrt{13}$ にそろうことになります。

以上が冒頭の問題になります。計算問題としては非常に難しいですが，この問題を令和元年初夏，勤め先の 1 年生に対して次のように出題しました。

> $\sqrt{4+\sqrt{13}}\sqrt{5+\sqrt{12}}-\sqrt{5+\sqrt{13}}\sqrt{4+\sqrt{3}}$ を
> 計算せよ。令和元年にちなんだ結果になります。

この計算問題に 2 通の解答（そして正解）が届きました。そこには思わぬ計算の工夫があり，本稿を書こうと思ったきっかけになりました。その解答を，節を改めて紹介させていただきたいと思います。

§5. 高校 1 年生による計算

1 人目の生徒は与式に $\dfrac{\sqrt{4-\sqrt{13}}\sqrt{4-\sqrt{3}}}{\sqrt{4-\sqrt{13}}\sqrt{4-\sqrt{3}}}$ $(=1)$ を掛けるというアイディアです。分子は次のようになります。分母の有理化を参考にした，「分子の 2 重根号の 1 重根号化」とでも呼ぶべき工夫です。

$$分子=\sqrt{(4+\sqrt{13})(4-\sqrt{13})}\sqrt{(5+\sqrt{12})(4-\sqrt{3})}$$
$$-\sqrt{(5+\sqrt{13})(4-\sqrt{13})}\sqrt{(4+\sqrt{3})(4-\sqrt{3})}$$
$$=\sqrt{3}\sqrt{14+3\sqrt{3}}-\sqrt{7-\sqrt{13}}\sqrt{13}$$
$$=\frac{\sqrt{3}\sqrt{28+2\sqrt{27}}-\sqrt{14-2\sqrt{13}}\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}(\sqrt{27}+1)-(\sqrt{13}-1)\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{13}-4}{\sqrt{2}}$$

結局，全体としては

$$与式=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{13}-4}{\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{13}}\sqrt{4-\sqrt{3}}}$$

です。ここで行き詰まったかのように見えますが，

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}+\sqrt{13}-4)^2}{(\sqrt{2}\sqrt{4-\sqrt{13}}\sqrt{4-\sqrt{3}})^2}}$$
$$=\sqrt{\frac{32-8\sqrt{3}-8\sqrt{13}+2\sqrt{39}}{32-8\sqrt{3}-8\sqrt{13}+2\sqrt{39}}}=\sqrt{1}=1$$

だというのです。「ものすごい時間を掛けた」という感想でしたが，入学直後の 1 年生とは思えない工夫に脱帽しました。レポートの最後の「 1 」が特大サイズの文字で印象的でした。また，最後の計算に注目すると

$$(8-2\sqrt{13})(4-\sqrt{3})=(\sqrt{3}+\sqrt{13}-4)^2$$

という，§3 の最後で述べたものと類似の関係式が現れました。**性質 3** の②で $A=a^2$ として符号を調整すると，この関係は次の**性質 5** とすることができます。「個々の 2 重根号ははずれないが，積ははずれる」計算の変則版で，ここから**【問題 2 】**が誕生しました。

性質5：$a^2-B=C$ のとき
$$\sqrt{2}\sqrt{a\pm\sqrt{B}}\sqrt{a\pm\sqrt{C}}=\pm a+\sqrt{B}+\sqrt{C}$$

2人目の生徒も分数計算に持ち込んでいましたが，全く別の過程をたどります。「家族に問題を見せて関数電卓で計算してもらったところ，結果が1になることを知り，やる気が出た」ということでした。そして

$$\sqrt{4+\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{17+2\sqrt{52}-1}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{13}+2)^2-1}}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{(\sqrt{13}+3)(\sqrt{13}+1)}}{2}$$

同様にして

$$\sqrt{5+\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)(3\sqrt{3}+1)}}{\sqrt{2}}$$
$$\sqrt{5+\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{13}+3)(\sqrt{13}-1)}}{\sqrt{2}}$$
$$\sqrt{4+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{(\sqrt{3}+1)(3\sqrt{3}-1)}}{\sqrt{2}}$$

に気がついたというのです。あとは，1人目の生徒と同じく $A=\sqrt{A^2}$ の変形を用いて

$$\sqrt{13}\pm1,\ 3\sqrt{3}\pm1,\ \sqrt{13}\pm3,\ \sqrt{3}\pm1$$

の計算をどんどん進めて $\cdots=\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=1$ という決着です。やはり最後の「1」は力がこもった文字でした。

授業を通して一定の型を学習することはもちろん大切ですが，2人の計算に接して，型に当てはめすぎてはいけないものだと，つくづく感じました。

さて，「個々の2重根号ははずれないが，和・差でははずれる」パターン探しが残っています。

§6. 結びに変えて

“Four Fours”（4つの4）という数字パズルがあります。4つの4と簡単な演算，記号で自然数を次々と作っていく有名なパズルですが，あるとき，

$$162=\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{4}}}+\sqrt{4\sqrt{\sqrt{4}}}\right)^4$$

という式を見かけてメモをしておいたことがあります。これをヒントにそのパターン探しをしたところ，うまい計算が見つかりました。

はずれる2重根号 $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$ も $\sqrt{\sqrt{2}}$ 倍すればはずれない2重根号 $\sqrt{7\sqrt{2}-4\sqrt{3}}$ になります。**【問題3】**はこのことを利用しました。次のように計算します。

$$\sqrt{7\sqrt{2}-4\sqrt{3}}-\sqrt{10\sqrt{2}-8\sqrt{3}}$$
$$=\sqrt{\sqrt{2}(7-2\sqrt{6})}-\sqrt{\sqrt{2}(10-2\sqrt{24})}$$
$$=\sqrt{\sqrt{2}(\sqrt{6}-1)^2}-\sqrt{\sqrt{2}(2-\sqrt{6})^2}$$
$$=(\sqrt{6}-1)\sqrt{\sqrt{2}}+(2-\sqrt{6})\sqrt{\sqrt{2}}$$
$$=\{(\sqrt{6}-1)+(2-\sqrt{6})\}\sqrt{\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt{\sqrt{2}}$$
$$=\sqrt[4]{2}$$

結果に4乗根が出てくるので，数Ⅰの問題としては出題できませんが，決して無理のない変形と考えます。

これでうまくいった！と思ったのは早計でした。というのも（その作り方から当然ですが），

$$\sqrt{7\sqrt{2}-4\sqrt{3}}=\sqrt{\sqrt{2}(7-2\sqrt{6})}$$
$$=\sqrt{\sqrt{2}}(\sqrt{6}-1)$$
$$=\sqrt[4]{72}-\sqrt[4]{2}$$

という具合に2重根号がはずれてしまうのです。結局「個々の2重根号ははずれないが，和・差を計算するとはずれてしまう」計算は見つからなかったことになります。蛇足ですが，

$$\sqrt{10+2\sqrt{45}}=\sqrt{\sqrt{5}(6+2\sqrt{5})}$$
$$=\sqrt{\sqrt{5}}\sqrt{6+2\sqrt{5}}$$
$$=\sqrt{\sqrt{5}}(\sqrt{5}+1)$$
$$=\sqrt[4]{125}+\sqrt[4]{5}$$

のような計算もあります（これが**【番外編】**です）から，「足して10，掛けて45となる2数はないから，2重根号ははずれない」というのは平方根に限った話だったことがわかりました。

$\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ から始まった試みにはまだまだ続きがありそうですが，ここまででも十分に楽しむことができましたので，ひとまず形にしてみました。素晴しい解答を教えてくれた生徒諸君，どうもありがとう。

（東京都立立川高等学校）