# 同値な条件を１つの式で表すこと

伊藤(いとう)　裕(ゆたか)

## §1. はじめに

本稿において $x$, $y$, $z$ は実数とする。

数Ⅰの「集合と命題」や数Ⅱの「式と証明」のところで，次の同値な言い換えについて学ぶ。

「$x$, $y$, $z$ はすべて０」

$\iff x^2+y^2+z^2=0$

「$x$, $y$, $z$ のうち，少なくとも１つは０」

$\iff xyz=0$

放課後に生徒たちとこの内容で話がはずみ，上２つの条件のちょうど中間にあたる条件「$x$, $y$, $z$ のうち，少なくとも２つは０」を１つの式で表すことができるかどうか聞いてみた。何人かの生徒が興味を持って考えてくれて，正解を導いた生徒もいた。

以下，同値な条件を１つの式で表すことについて考える。

## §2. 0 であることを表す

生徒に聞いてみた条件については，

「$x$, $y$, $z$ のうち，少なくとも２つは０」

$\iff$

「$x=y=0$ または $y=z=0$ または $z=x=0$」

であるから，次の言い換えを得る。

「$x$, $y$, $z$ のうち，少なくとも２つは０」

$\iff (x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)=0$

０であることを表す式についてまとめておく。

「$x$, $y$, $z$ はすべて０」

$\iff x^2+y^2+z^2=0$

「$x$, $y$, $z$ のうち，少なくとも２つは０」

$\iff (x^2+y^2)(y^2+z^2)(z^2+x^2)=0$

「$x$, $y$, $z$ のうち，少なくとも１つは０」

$\iff xyz=0$

## §3. 0 以下であることを表す

ここでは，条件「すべて０以下」,「少なくとも２つは０以下」,「少なくとも１つは０以下」を１つの式で表すことを考える。

これらについては，

「$x$ が０以下」$\iff x+|x|=0$

であることに注意すれば，§2 の表現を用いて次の言い換えを得る。

「$x$, $y$, $z$ はすべて０以下」

$\iff (x+|x|)^2+(y+|y|)^2+(z+|z|)^2=0$

「$x$, $y$, $z$ のうち，少なくとも２つは０以下」

$$\iff \{(x+|x|)^2+(y+|y|)^2\}\{(y+|y|)^2+(z+|z|)^2\}\times\{(z+|z|)^2+(x+|x|)^2\}=0$$

「$x$, $y$, $z$ のうち，少なくとも１つは０以下」

$\iff (x+|x|)(y+|y|)(z+|z|)=0$

## §4. 負であることを表す

ここでは，条件「すべて負」,「少なくとも２つは負」,「少なくとも１つは負」を１つの式で表すことを考える。

実数 $s$, $t$ について，

$$\max(s,\ t)=\frac{s+t+|s-t|}{2},$$

$$\min(s,\ t)=\frac{s+t-|s-t|}{2}$$

に注意しておく。

まず「すべて負」については，

「$x$, $y$, $z$ はすべて負」$\iff \max(x,\ y,\ z)<0$

であり，

$$\max(x,\ y,\ z)=\max(\max(x,\ y),\ z)$$

に注意して，次の言い換えを得る。

「$x$, $y$, $z$ はすべて負」

$$\iff \max\left(\frac{x+y+|x-y|}{2},\ z\right)<0$$

$$\iff \frac{\dfrac{x+y+|x-y|}{2}+z+\left|\dfrac{x+y+|x-y|}{2}-z\right|}{2}<0$$

$$\iff x+y+2z+|x-y|+\bigl|x+y-2z+|x-y|\bigr|<0$$

次に「少なくとも 1 つは負」については，

「$x$，$y$，$z$ のうち少なくとも 1 つは負」

$\Longleftrightarrow \min(x,\ y,\ z)<0$

であり，

$$\min(x,\ y,\ z)=\min(\min(x,\ y),\ z)$$

に注意して，次の言い換えを得る。

「$x$，$y$，$z$ のうち少なくとも 1 つは負」

$$\Longleftrightarrow \min\left(\frac{x+y-|x-y|}{2},\ z\right)<0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\dfrac{x+y-|x-y|}{2}+z-\left|\dfrac{x+y-|x-y|}{2}-z\right|}{2}<0$$

$$\Longleftrightarrow x+y+2z-|x-y|-\bigl|x+y-2z-|x-y|\bigr|<0$$

最後に「少なくとも 2 つは負」については，$x$，$y$，$z$ を小さい順に並べたときに真ん中にくる数を $m$ とすれば，

「$x$，$y$，$z$ のうち少なくとも 2 つは負」$\Longleftrightarrow m<0$

であることと，

$$m=x+y+z-\max(x,\ y,\ z)-\min(x,\ y,\ z) \quad \cdots\cdots(※)$$

に注意して，次の言い換えを得る。

「$x$，$y$，$z$ のうち少なくとも 2 つは負」

$$\Longleftrightarrow$$

$$x+y+z-\frac{\dfrac{x+y+|x-y|}{2}+z+\left|\dfrac{x+y+|x-y|}{2}-z\right|}{2}$$

$$-\frac{\dfrac{x+y-|x-y|}{2}+z-\left|\dfrac{x+y-|x-y|}{2}-z\right|}{2}<0$$

$$\Longleftrightarrow 4x+4y+4z$$

$$-\bigl(x+y+|x-y|+2z+\bigl|x+y+|x-y|-2z\bigr|\bigr)$$

$$-\bigl(x+y-|x-y|+2z-\bigl|x+y-|x-y|-2z\bigr|\bigr)<0$$

$$\Longleftrightarrow 2x+2y-\bigl|x+y-2z+|x-y|\bigr|$$

$$+\bigl|x+y-2z-|x-y|\bigr|<0$$

今となっては当たり前の等式だが，(※) に気付くのに多少の時間を要した。

最後に，負であることを表す式をまとめておく。

「$x$，$y$，$z$ はすべて負」

$$\Longleftrightarrow x+y+2z+|x-y|+\bigl|x+y-2z+|x-y|\bigr|<0$$

「$x$，$y$，$z$ のうち少なくとも 2 つは負」

$$\Longleftrightarrow 2x+2y-\bigl|x+y-2z+|x-y|\bigr|$$

$$+\bigl|x+y-2z-|x-y|\bigr|<0$$

「$x$，$y$，$z$ のうち少なくとも 1 つは負」

$$\Longleftrightarrow x+y+2z-|x-y|-\bigl|x+y-2z-|x-y|\bigr|<0$$

## §5. 終わりに

生徒たちとの会話がきっかけとなり，同値な条件を式で表すことを考えてみたが，「少なくとも 2 つは負」の式が最も印象に残った。

§2，§3 については，同値な式を求めるために必要な内容はすべて教科書に載っており，パズル的な要素もあるので，数学に興味のある生徒にとっては良い問題になると思う。正解を導けなかった場合でも，言い換えた式が同値であることを理解することで，生徒の力になるはずである。

(神奈川県立生田高等学校)