点滅正四面体を題材にした確率の問題の探究

河内（かわち）　一樹（かずき）

§1. はじめに

記事〔1〕では，投げるたびに4つの面がそれぞれ光ったり光が消えたりする「点滅正四面体」を題材として，投げる回数が1回から5回のときに，それぞれの回数だけ投げ終えたときに光っている面の数の期待値を考察していた。

本稿では，投げる回数がn回のときの期待値を2通りの方法で求め，その挙動を調べる。期待値を求める方法については現行課程の数学ⅠAⅡBの範囲で解くことができ，数学Bの「確率分布と統計的な推測」を学び終えた生徒たちの探究活動の指針になりえる。また，期待値を求めるためには何らかの確率を求める必要がある。確率を求める議論は「確率分布と統計的な推測」が未習の生徒たちにも十分に有意義であると考えられる。

設定を明確にしておく。点滅正四面体とは，4つの面がそれぞれ光ったり，光が消えたりする正四面体である。投げたときに底面になった面は，それまで光っていた場合は光が消え，光が消えていた場合は光る。また，投げたときに底面になっていない面は，それまで光っていた場合は光ったままで，光が消えていた場合は消えたままである。

最初，点滅正四面体はすべての面の光が消えている状態で床の上に置かれている。この点滅正四面体を持ちあげては投げるという試行をn回繰り返す。どの面も等しい確率で底面になるとする。n回目の試行ののちに光っている面の数をX_nとおき，その期待値$E(X_n)$を求める。

§2. 期待値の加法定理を用いる解法

点滅正四面体の4つの面に1，2，3，4と番号をつける。$k=1$，2，3，4に対して，n回目の試行ののちに面kが光っている確率を$p_k(n)$とおき，確率変数$Y_k(n)$を，n回目の試行ののちに面kが光っているならば1，光が消えているならば0と定義する。

このとき，n回目の試行後に光っている面の個数を2通りで表して

$$X_n=\sum_{k=1}^{4}Y_k(n)$$

が成り立つ。したがって，期待値の加法定理を用いて

$$E(X_n)=\sum_{k=1}^{4}E(Y_k(n))$$

が成り立つ。一方，$p_k(n)$と$Y_k(n)$の定義から

$$E(Y_k(n))=1\times p_k(n)+0\times\{1-p_k(n)\}=p_k(n)$$

である。よって

$$E(X_n)=\sum_{k=1}^{4}p_k(n)$$

となる。

次に，$p_k(n)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$を求める。

$(n+1)$回目の試行ののち面kが光っているという事象は，次の2つの事象の和事象であり，これらは互いに排反である：

［1］n回目の試行ののち面kが光っていて，かつその次の試行で面kが底面にならない。

［2］n回目の試行ののち面kの光が消えていて，かつその次の試行で面kが底面になる。

よって

$$p_k(n+1)=p_k(n)\times\frac{3}{4}+\{1-p_k(n)\}\times\frac{1}{4}$$

が成り立つ。右辺を整理して

$$p_k(n+1)=\frac{1}{2}p_k(n)+\frac{1}{4}$$

変形して

$$p_k(n+1)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left\{p_k(n)-\frac{1}{2}\right\}$$

よって，数列$\left\{p_k(n)-\frac{1}{2}\right\}$は公比$\frac{1}{2}$の等比数列であるから

$$p_k(n)-\frac{1}{2}=\left\{p_k(1)-\frac{1}{2}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

すなわち

$$p_k(n)=\frac{1}{2}+\left\{p_k(1)-\frac{1}{2}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる。

ゆえに

$$E(X_n)=2+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\sum_{k=1}^{4}\left\{p_k(1)-\frac{1}{2}\right\}$$

が得られる。

最初，点滅正四面体のすべての面の光が消えている状態で床の上に置かれているため，1 回目の試行のあとにはすべての面が等確率で光る，すなわち

$$p_k(1)=\frac{1}{4}\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

である。これを代入して

$$E(X_n)=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\qquad\cdots\cdots①$$

が得られる。

§3. §2 の考察

§2 の過程および結果について簡単に考察する。

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ を①に代入すると，順に

$$1,\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{4},\ \frac{15}{8},\ \frac{31}{16}$$

となり，記事〔1〕で導かれた結果と一致する。

次に，数列 $\{E(X_n)\}$ は単調に増加し，

$$\lim_{n\to\infty}E(X_n)=2$$

となる。十分多く試行を続けると，平均して 2 個の面が光っていることがわかる。

§2 では，1 回目の試行を行う前の点滅正四面体の状態を「すべての面の光が消えている状態」と仮定して議論した。そうでない場合，$p_k(1)$ は他の値をとりえるが，$\lim_{n\to\infty}E(X_n)=2$ はやはり成り立つ。特殊な場合として，1 回目の試行を行う前に面 1 と面 2 のみが光っていると仮定すると，

$$p_1(1)=p_2(1)=\frac{3}{4},\quad p_3(1)=p_4(1)=\frac{1}{4}$$

から，n の値によらず常に $E(X_n)=2$ となる。

§4. 期待値の定義を用いる解法

期待値の加法定理を利用しない場合は，定義に基づいて $E(X_n)$ を求める。そのためには，X_n のとりうる値と，その値をとる確率をすべて決定する必要がある。

1 回の試行で，光っている面は 1 個増えるか，もしくは 1 個減る。したがって，試行を行うごとに，光っている面の個数の偶奇は入れ替わる。はじめはすべての面の光が消えているため，X_n は n が奇数のとき 1，3 以外の値をとらず，n が偶数のとき 0，2，4 以外の値をとらない。

n が奇数のとき，$n=2m-1$ となる自然数 m が存在する。$P(X_{2m-1}=1)=q_m$ とおくと，$P(X_{2m-1}=3)=1-q_m$ である。また，1 回目の試行のあとで必ず 1 個の面が光るから，$q_1=1$ である。

$X_{2m+1}=1$ となる事象は，次の 3 つの事象の和事象であり，これらは互いに排反である：

[1] $X_{2m-1}=1$ かつ，$2m$ 回目の試行で，光っている面が底面になる事象。このとき，常に $X_{2m}=0$ となるから，常に $X_{2m+1}=1$ となる。

[2] $X_{2m-1}=1$ かつ，$2m$ 回目の試行で，光が消えている面が底面になり，かつ $(2m+1)$ 回目の試行で，光っている面が底面になる事象。

[3] $X_{2m-1}=3$ かつ，$2m$ 回目の試行で，光っている面が底面になり，かつ $(2m+1)$ 回目の試行で，光っている面が底面になる事象。

よって

$$q_{m+1}=q_m\times\frac{1}{4}+q_m\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+(1-q_m)\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}$$

が成り立ち，右辺を整理して

$$q_{m+1}=\frac{1}{4}q_m+\frac{3}{8}$$

変形して

$$q_{m+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\left(q_m-\frac{1}{2}\right)$$

よって，数列 $\left\{q_m-\frac{1}{2}\right\}$ は，初項 $q_1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$q_m-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}$$

すなわち

$$q_m=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{m-1}$$

となる。ゆえに

$$\begin{aligned}E(X_{2m-1})&=1\times q_m+3\times(1-q_m)\\&=-2q_m+3\\&=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}\end{aligned}$$

が得られる。

次に，n が偶数のとき，$n=2m$ となる自然数 m が存在する。

$X_{2m}=0$ となるのは，$X_{2m-1}=1$ かつ，$2m$ 回目の試行で，光っている面が底面になるときであるから

$$P(X_{2m}=0)=q_m\times\frac{1}{4}$$

である。また，$X_{2m}=4$ となるのは，$X_{2m-1}=3$ かつ，$2m$ 回目の試行で，光が消えている面が底面になるときであるから

$$P(X_{2m}=4)=(1-q_m)\times\frac{1}{4}$$

である。さらに，X_{2m} は 0，2，4 以外の値をとらないから

$$P(X_{2m}=2)=1-\frac{1}{4}q_m-\frac{1}{4}(1-q_m)=\frac{3}{4}$$

である。

ゆえに

$$\begin{aligned}E(X_{2m})&=0\times\frac{1}{4}q_m+2\times\frac{3}{4}+4\times\frac{1}{4}(1-q_m)\\&=\frac{5}{2}-q_m\\&=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}\end{aligned}$$

が得られる。

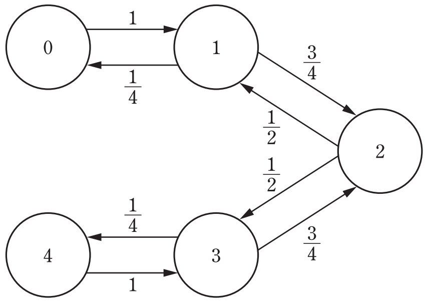
以上から，n の偶奇によらずに常に①が成り立つことが再び確認できた。

ところで，議論の途中で見出される事実として，偶数回目の試行のあとに，2 個の面が光っている確率は必ず $\frac{3}{4}$ になることがわかり，これ自体なかなか興味深い。そして，

$$\lim_{m\to\infty}q_m=\frac{1}{2}$$

である。そのため，十分に試行回数を重ねると，奇数回目の試行のあとに，光っている面が 1 個である確率と 3 個である確率はどちらもほぼ $\frac{1}{2}$ となり，また，偶数回目の試行のあとに，すべての面が光っている確率とすべての面の光が消えている確率はどちらもほぼ $\frac{1}{8}$ となることもわかる。

X_n の値の推移とその確率を表した図を記す。q_m に対する漸化式を導く際に参考になる。丸で囲った数字は光っている面の数を表し，矢印に添えた数は推移確率を表す。



§5. 他の正多面体では？

正四面体を他の正多面体に取り換えるとどうなるだろうか？

期待値の加法定理を用いると，全く同様に議論することができる。詳細は省略するが，光っている面の個数の期待値は試行回数に関して単調に増加し，面の数の半分の値に収束することがわかる。

期待値の加法定理を用いない場合，光っている面の数としてとりうる数が増えるために，高校数学で学ぶような漸化式の初等的な扱いではもはや手に負えなくなる。推移確率行列を考えてその性質を調べる必要が生じる。

振り返ってみると，高校生を対象にするにあたり正四面体を題材にするのは，記事〔1〕で調べているように具体的に数え上げることもでき，さらに本稿のように漸化式を立てて解くこともできるという観点からも，とても教育的であることがわかる。

《参考文献》

〔1〕 数研通信 96 号　西元教善『点滅正四面体を題材にした確率の問題～生徒に興味・関心を持たせる問題として～』

（兵庫県　灘中学校・高等学校）