関数不等式と無理数

才野瀬　一郎（さいのせ　いちろう）

§1. はじめに

自然対数の底 e が無理数であることは，その級数表示を利用して示すことができる(参考文献〔1〕P424)。

証明のポイントは，$0<x\leqq 1$ における関数不等式(命題 7 (4)の $[E(x),\ n]$)

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}<e^x$$
$$<1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{x^n}{n!}$$

に $x=1$ を代入した不等式が成り立つところにある。

このように関数不等式を利用して，指数関数や三角関数のいくつかの特殊値が無理数であることを示そう。

主結果は次の主題であり，命題 4 が理論の中心である。

[主題]

d は自然数，a，b，p，q は 0 以上の有理数の組で，少なくとも 1 個が 0 でないとき，

$$a\cdot\sqrt[d]{e}+b\cdot\frac{1}{\sqrt[d]{e}}+p\cdot\sin\left(\frac{1}{d}\right)+q\cdot\cos\left(\frac{1}{d}\right)$$

は無理数である。

特に，e，$\sin 1$，$\cos 1$ は無理数である。

§2. 基本命題

今後，関数不等式 $f(x)<g(x)$ を考える際には，定義域は $0<x\leqq 1$ とする。

[命題 1]　単項式 $w_n(x)$

$w_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$ $(n\geqq 0)$ とおくと，

(1)　$w_0(x)=1$，$w_0'(x)=0$，
　$w_n'(x)=w_{n-1}(x)$ $(n\geqq 1)$

一般に，$0\leqq r\leqq n$ のとき

$$w_n^{(r)}(x)=w_{n-r}(x)$$

(2)　$w_0(0)=1$，$w_n(0)=0$ $(n\geqq 1)$

(3)　A を正の定数とするとき，
$n>A-1$ ならば $A\cdot w_{n+1}(x)<w_n(x)$
特に，$n>0$ ならば $w_{n+1}(x)<w_n(x)$

証明　(1)(2)：容易。

(3)　$n+1>A$，$0<x\leqq 1$ より

$$A\cdot w_{n+1}(x)=\frac{A}{n+1}\cdot x\cdot\frac{x^n}{n!}<\frac{x^n}{n!}=w_n(x)$$

[定義 2]

次の(性質)を満たす関数 $f(x)$ を考える。

(性質)

『定義域が実数全体であり，すべての自然数 n に対して第 n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ が存在し，$f^{(n)}(0)$ が整数値となる。』

このとき，$f(x)$ から定まる n 次多項式を

$$f_n(x)$$
$$=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\ \left(=\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(0)w_k(x)\right)$$

とおく。

さらに，A は正の定数，n は 0 以上の整数として，次のような関数不等式 $[f(x),\ n]$ と $[f(x),\ A,\ n]$ を定める。

(ア)　関数不等式 $[f(x),\ n]$：
　$f_n(x)<f(x)<f_n(x)+w_n(x)$

(イ)　関数不等式 $[f(x),\ A,\ n]$：
　$f_n(x)<f(x)<f_n(x)+Aw_{n+1}(x)$

[命題 3]　関数不等式がもつ性質

(1)　$n>A-1$ と $[f(x),\ A,\ n]$ が成り立つならば，$[f(x),\ n]$ が成り立つ。

(2) (性質)を満たす関数と正の定数の組 $(f(x),\ A)$ と $(g(x),\ B)$ に対して，

$[f(x),\ A,\ n]$ と $[g(x),\ B,\ n]$ が共に成り立つならば，

$[f(x)+g(x),\ A+B,\ n]$ も成り立つ。

証明 (1) $A\cdot w_{n+1}(x)<w_n(x)$ を示せば十分だが，命題 1 (3)より明らか。

(2) 定義より明らか。

［命題 4］ 基本命題

d は自然数，A は正の定数とする。

(1) $[f(x),\ n]$ が無限個の n に対して成り立つならば，$f\left(\dfrac{1}{d}\right)$ は無理数となる。

(2) $[f(x),\ A,\ n]$ が無限個の n に対して成り立つならば，$f\left(\dfrac{1}{d}\right)$ は無理数となる。

(3) (性質)を満たす m 個の関数と正の定数の組 $(f^k(x),\ A_k)$ $(1\leqq k\leqq m)$ に対して，$[f^k(x),\ A_k,\ n]$ が同時に成り立つような自然数 n が無限に存在すると仮定する。このとき，少なくとも 1 つが 0 と異なるような，0 以上の整数 $a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_m$ に対して，次の D は無理数となる。

$$D=a_1\cdot f^1\left(\frac{1}{d}\right)+a_2\cdot f^2\left(\frac{1}{d}\right)+\cdots\cdots+a_m\cdot f^m\left(\frac{1}{d}\right)$$

証明 (1) もし $f\left(\dfrac{1}{d}\right)$ が有理数と仮定すると

$f\left(\dfrac{1}{d}\right)=\dfrac{q}{p}$ （p は自然数，q は整数)

と表せる。このとき，$n\geqq p$ かつ関数不等式 $[f(x),\ n]$ が成り立つような自然数 n がとれて，次の式が成り立つ。

$$f_n\left(\frac{1}{d}\right)<f\left(\frac{1}{d}\right)<f_n\left(\frac{1}{d}\right)+w_n\left(\frac{1}{d}\right)=f_n\left(\frac{1}{d}\right)+\frac{1}{n!\,d^n}$$

辺々を $n!\,d^n$ 倍して

$$r_n=n!\,d^n\cdot f_n\left(\frac{1}{d}\right)$$

とおく。すると，

各 $f^{(k)}(0)$，$\dfrac{n!}{k!}$，$\dfrac{d^n}{d^k}$ $(0\leqq k\leqq n)$ が整数より

$r_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(0)\cdot\frac{n!}{k!}\cdot\frac{d^n}{d^k}$ は整数であり，

$$n!\,d^n\left\{f_n\left(\frac{1}{d}\right)+\frac{1}{n!\,d^n}\right\}=r_n+1$$

さらに，$r=n!\,d^n\cdot f\left(\dfrac{1}{d}\right)=\dfrac{n!}{p}qd^n$ も整数で，

$r_n<r<r_n+1$ を満たす。

これは，連続する 2 つの整数 r_n と r_n+1 の間に整数 r が存在するので，矛盾である。

(2) (1)と命題 3 (1)による。

(3) 命題 3 (2)を繰り返し用いて，

$$[a_1\cdot f^1(x)+a_2\cdot f^2(x)+\cdots\cdots+a_m\cdot f^m(x),\quad a_1A_1+a_2A_2+\cdots\cdots+a_mA_m,\ n]$$

が無限個の n に対して成り立つ。(2)によれば，D は無理数である。

§3. 関数不等式を作る準備

［補題 5］

実数全体で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ は 2 回微分可能，かつ $f(0)=g(0)$ とする。

(不等式の定義域は $0<x\leqq 1$ として)

(1) $f'(x)>g'(x)\ \Rightarrow\ f(x)>g(x)$

(2) $f'(0)=g'(0)$ かつ $f''(x)>g''(x)$
$\Rightarrow\ f(x)>g(x)$

証明 (1) $h(x)=f(x)-g(x)$ とおく。

$h(0)=f(0)-g(0)=0$ と

$h'(x)=f'(x)-g'(x)>0$ $(0<x\leqq 1)$

より $h(x)>0$ となり $f(x)>g(x)$ を得る。

(2)：仮定により，(1)を用いて $f'(x)>g'(x)$

さらに，$f(0)=g(0)$ より(1)を用いて $f(x)>g(x)$

［命題 6］ 定義 2 の補足

$f_n{}^{(r)}(x)=f^{(r)}{}_{n-r}(x)$ $(0\leqq r\leqq n)$

特に，$f_n{}'(x)\equiv(f_n(x))'=f_{n-1}(x)$

したがって $f_n{}^{(r)}(0)=f^{(r)}{}_{n-r}(0)$

証明 $f^{(k+r)}(x)=(f^{(r)})^{(k)}(x)$ に注意。

$f_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}f^{(k)}(0)w_k(x)$ と命題 1 (1)により

$$\begin{aligned}f_n{}'(x)&=\sum_{k=1}^{n}f^{(k)}(0)w_k{}'(x)\\&=\sum_{k=1}^{n}(f')^{(k-1)}(0)w_{k-1}(x)\quad(\because 命題 1 (1))\\&=\sum_{k=0}^{n-1}(f')^{(k)}(0)w_k(x)=f'{}_{n-1}(x)\end{aligned}$$

これを 2 回利用して，

$f_n''(x)\equiv\{f_n'(x)\}'=(f'_{n-1}(x))'$

$=(f')'_{(n-1)-1}(x)=f''_{n-2}(x)$

以下，帰納的に結論を得る。

§4. 関数不等式の例

［命題 7］ 指数関数 e^x

$E(x)=e^x$，$n\geqq 0$ とする。

(1) $E^{(n)}(x)=e^x$，$E^{(n)}(0)=1$ （整数）

(2) $E_n(x)=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+\dfrac{x^n}{n!}$

(3) $[E(x),\ 2,\ n]$ が成り立つ。

(4) さらに $n>1$ のとき，

$[E(x),\ n]$ が成り立つ。

証明 (1)(2)は定義より容易。

(3) n の帰納法により $[E(x),\ 2,\ n]$：

$E_n(x)<E(x)<E_n(x)+2w_{n+1}(x)$ ……①

を示す。

(左側は参考文献〔1〕P360 例題 216)

$n=0$ のとき，$1<e^x<1+2x$ である。

実際，左側は明らかなので右側を示す。

$g(x)=1+2x-e^x$ とおく。

$g'(x)=2-e^x$ より

x	0		$\log 2$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(\log 2)$	$\searrow$	$3-e$

$3-e>0$ に注意すると，$0<x\leqq 1$ において

$g(x)>0$ となり，右側も成り立つ。

さらに，①を仮定して次の②を示せばよい。

$E_{n+1}(x)<E(x)<E_{n+1}(x)+2w_{n+2}(x)$ ……②

ここで，$E'(x)=E(x)$ と命題 6 により，

$E_{n+1}'(x)=E'_n(x)=E_n(x)$

さらに命題 1 (1)と①により

$E_{n+1}'(x)<E'(x)<E_{n+1}'(x)+2w_{n+2}'(x)$

が成り立つ。最後に，

$E_{n+1}(0)=E(0)=E_{n+1}(0)+2w_{n+2}(0)=1$

より，補題 5 (1)から②が成り立つ。

(4) (3)と命題 3 (1)による。

［命題 8］

$F(x)=e^{-x}$，$n\geqq 0$ とする。

(1) $F^{(n)}(x)=(-1)^n e^{-x}$，$F^{(n)}(0)=(-1)^n$ （整数）

(2) $F_n(x)=1-\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}$

(3) 次の関数不等式が成り立つ。

$F_{2n+1}(x)<F(x)<F_{2n}(x)$

(4) $[F(x),\ 1,\ 2n+1]$ が成り立つ。

証明 (1) $F'(x)=-e^{-x}=-F(x)$，$F(0)=1$

による。

(2) 容易。

(3) n の帰納法による。

$n=0$ のとき，$1-x<e^{-x}<1$ が成り立つ。

実際，$-1<-e^{-x}<0$ より

$F_1'(x)<F'(x)<F_0'(x)$

さらに，$F_1(0)=F(0)=F_0(0)=1$ より，

補題 5 (1)を用いて $F_1(x)<F(x)<F_0(x)$

次に，$F_{2n+1}(x)<F(x)<F_{2n}(x)$

を仮定すると，(1)と命題 6 により

$F_{2n+3}''(x)<F''(x)<F_{2n+2}''(x)$

また，$F_{2n+3}(0)=F(0)=F_{2n+2}(0)$

さらに，$F'_{2n+2}(0)=F'(0)=F'_{2n+1}(0)$ より

$F_{2n+3}'(0)=F'(0)=F_{2n+2}'(0)$

補題 5 (2)を用いると

$F_{2n+3}(x)<F(x)<F_{2n+2}(x)$ が成立。

(4) (3)により，$n\geqq 0$ のとき

$F_{2n+1}(x)<F(x)<F_{2n+2}(x)$ および

$F_{2n+2}(x)=F_{2n+1}(x)+w_{2n+2}(x)$

による。

［命題 9］ 三角関数

$S(x)=\sin x$，$C(x)=\cos x$ とおく。

(1) $S(0)=0$，$C(0)=1$

$S'(x)=C(x)$，$C'(x)=-S(x)$

$S''(x)=-S(x)$，$C''(x)=-C(x)$

(2) $S^{(4n+1)}(0)=C^{(4n)}(0)=1$，

$S^{(4n+3)}(0)=C^{(4n+2)}(0)=-1$，

$S^{(2n)}(0)=C^{(4n\pm1)}(0)=0$ （すべて整数）

(3) $S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{S^{(k)}(0)}{k!}x^k$

$$=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\cdots+\frac{S^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$C_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{C^{(k)}(0)}{k!}x^k$$
$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\cdots+\frac{C^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

(4)　$S_n'(x)=C_{n-1}(x)$，$C_n'(x)=-S_{n-1}(x)$

証明　(1)(2)(3)は容易。

(4)：(1)と命題 6 による。

[命題 10]

(1)　次の関数不等式が成り立つ。

$C_{4n+2}(x)<C(x)<C_{4n}(x)$

$S_{4n+3}(x)<S(x)<S_{4n+1}(x)$（$n\geqq 0$）

(2)　$[S(x), 1, 4n-1]$ と $[C(x), 1, 4n-1]$ が成り立つ。（$n\geqq 1$）

証明　(1)　次の(ア)～(オ)を示せば，帰納法により結論が従うことに注意する。

(ア)　$C(x)<C_0(x)=1$

(イ)　$C(x)<C_{4n}(x) \Rightarrow S(x)<S_{4n+1}(x)$

(ウ)　$S(x)<S_{4n+1}(x) \Rightarrow C_{4n+2}(x)<C(x)$

(エ)　$C_{4n+2}(x)<C(x) \Rightarrow S_{4n+3}(x)<S(x)$

(オ)　$S_{4n+3}(x)<S(x) \Rightarrow C(x)<C_{4n+4}(x)$

実際，(ア)は明らか。

(イ)：仮定と $S'(x)=C(x)$，$S_{4n+1}'(x)=C_{4n}(x)$ より　$S'(x)<S_{4n+1}'(x)$

さらに，$S(0)=S_{4n+1}(0)=0$ より補題 5 から従う。

(ウ)～(オ)も同様。

(2)　$n\geqq 1$ とする。$S(x)$ については(1)より

$S_{4n-1}(x)<S(x)<S_{4n+1}(x)$

ここで，$S^{(4n)}(0)=0$，$S^{(4n+1)}(0)=1$　および命題 1 (3) を利用して次が成り立つことによる。

$S_{4n+1}(x)=S_{4n-1}(x)+w_{4n+1}(x)<S_{4n-1}(x)+w_{4n}(x)$

$C(x)$ については，$C_{4n-2}(x)<C(x)<C_{4n}(x)$

および，$C^{(4n-1)}(0)=0$，$C^{(4n)}(0)=1$ より

$C_{4n-2}(x)=C_{4n-1}(x)$，$C_{4n}(x)=C_{4n-2}(x)+w_{4n}(x)$

以上から

$C_{4n-1}(x)<C(x)<C_{4n-1}(x)+w_{4n}(x)$

§5. まとめ

最後に，主結果を述べる。

[命題 11]

d を自然数とし，a，b，p，q は 0 以上の有理数で，少なくとも 1 つは 0 でないとするとき

$$D=a\cdot E\left(\frac{1}{d}\right)+b\cdot F\left(\frac{1}{d}\right)+p\cdot S\left(\frac{1}{d}\right)+q\cdot C\left(\frac{1}{d}\right)$$

は無理数である。

したがって，主題が成り立つ。

証明　命題 7，8，10 により，$n\geqq 1$ のとき，$[E(x), 2, 4n-1]$，$[F(x), 1, 4n-1]$，$[S(x), 1, 4n-1]$，$[C(x), 1, 4n-1]$ が同時に成り立つので，a，b，p，q が 0 以上の<u>整数</u>の場合は，命題 3 (2)，4 (3)により結論を得る。

なお，無理数 D を自然数で割ると再び無理数となるから，a，b，p，q は 0 以上の有理数としても良いことがわかる。

なお，大学数学によれば，次の注意 12 が成り立つ。命題 11 は，その特別な場合である。

[注意 12]

整数列　a_0，a_1，a_2，……　が正の項を無限に含み，かつ有界とする。

すなわち，ある正の定数 M が存在して，

$|a_k|\leqq M$（$k=0, 1, 2, \cdots\cdots$）を満たすとする。

この仮定の下で，巾級数 $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}x^k$

はすべての実数 x で収束し，$f^{(k)}(x)=a_k$（$k\geqq 0$）が成り立つ。（参考文献〔2〕定理 48，49）

仮定により，$a_k\geqq 1$ かつ $k>2M$ となる自然数 k が無限に存在する。それを小さい順に

$p(1)$，$p(2)$，……，$p(m)$，……

とおくと，関数不等式 $[f(x), p(m)-1]$ が成り立つことがわかり（証明は後述），命題 4 (1)によれば，

d を自然数として $f\left(\frac{1}{d}\right)$ は無理数となる。

これは，命題 11 の一般化になっている。

（a，b，p，q の仮定から，

少なくとも 1 つの m（$=0, 1, 2, 3$）に対して

$D^{(4k+m)}(0)=a_{4k+m}\neq 0$（$k\geqq 0$）に注意）

なお，整数列が負の項を無限に含む場合は，$-f(x)$ を考えることにより同じ結論を得る。したがって，命題 11 の仮定において「a，b，p，q は 0 以上の有理数」から，単に「a，b，p，q は有理数」と弱めることができる。

以下，$[f(x),\ p(m)-1]$ を示そう。

(1) $p=p(m)$ とおく。

$k \geqq 0$ のとき $|f_{p+k}(x)-f_p(x)|<\dfrac{x^p}{p!}$

証明 $k=0$ のときは明らか。

$k \geqq 1$ のとき

$$|f_{p+k}(x)-f_p(x)|$$
$$=\left|\frac{a_{p+1}x^{p+1}}{(p+1)!}+\frac{a_{p+2}x^{p+2}}{(p+2)!}+\cdots\cdots+\frac{a_{p+k}x^{p+k}}{(p+k)!}\right|$$

三角不等式により

$$\leqq \frac{|a_{p+1}|x^{p+1}}{(p+1)!}+\frac{|a_{p+2}|x^{p+2}}{(p+2)!}+\cdots\cdots+\frac{|a_{p+k}|x^{p+k}}{(p+k)!}$$
$$\leqq \frac{Mx^{p+1}}{(p+1)!}+\frac{Mx^{p+2}}{(p+2)!}+\cdots\cdots+\frac{Mx^{p+k}}{(p+k)!}$$
$$=\frac{Mx^p}{(p+1)!}\left\{x+\frac{x^2}{p+2}+\frac{x^3}{(p+2)(p+3)}+\cdots\cdots+\frac{x^k}{(p+2)(p+3)\cdots\cdots(p+k)}\right\}$$

$0<x\leqq 1$，$2\leqq p+2$，$p>2M$ より

$$\leqq \frac{Mx^p}{(p+1)!}\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}\right\}$$
$$\leqq \frac{Mx^p}{(p+1)!}\times 2=\frac{x^p}{p!}\times\frac{2M}{p+1}<\frac{x^p}{p!}$$

(2) $p=p(m)$，$k\geqq 0$ のとき

$f_{p-1}(x)<f_{p+k}(x)$

証明 $k=0$ のときは，$a_p\geqq 1$ より明らか。

$k\geqq 1$ のとき，(1)と $a_p \geqq 1$ より

$$f_{p+k}(x)-f_{p-1}(x)$$
$$=\frac{a_px^p}{p!}+f_{p+k}(x)-f_p(x)$$
$$\geqq \frac{a_px^p}{p!}-|f_{p+k}(x)-f_p(x)|$$
$$>\frac{a_px^p}{p!}-\frac{x^p}{p!}\geqq 0$$

(3) $[f(x),\ p(m)-1]$ が成り立つ。

すなわち，$p=p(m)$ とおくとき

$f_{p-1}(x)<f(x)<f_{p-1}(x)+w_{p-1}(x)$

証明 まず，左側を示す。

(2)より $f_{p(m)-1}(x)$ は m に関して単調増加。

さらに $f_{p(m)-1}(x)\to f(x)\ (m\to\infty)$ により，$f_{p(m)-1}(x)<f(x)$ がわかる。

次に，右側を示す。$k\geqq 0$ のとき，

$$f_{p+k}(x)-f_{p-1}(x)$$
$$=\frac{a_px^p}{p!}+\{f_{p+k}(x)-f_p(x)\}$$
$$\leqq \frac{a_px^p}{p!}+|f_{p+k}(x)-f_p(x)|$$

(1)より

$$\leqq \frac{a_px^p}{p!}+\frac{x^p}{p!}\leqq\frac{2Mx^p}{p!}=\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\times\frac{2Mx}{p}$$

$0<x\leqq 1$ より

$$\leqq \frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\times\frac{2M}{p}$$

ここで，$k\to\infty$ とすると $f_{p+k}(x)\to f(x)$

および，$p>2M$ より

$$f(x)-f_{p-1}(x)\leqq\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\times\frac{2M}{p}<\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}$$

となり，右側も成り立つ。

このレポートを考えるきっかけは，当時 3 年生のＦ君とＹ君の質問「tan 1°(度)は無理数だが，sin 1(ラジアン)も無理数か？」にある。検討の末に，e と同様に級数表示(マクローリン展開)を用いれば証明できること，本質的には関数不等式を利用すれば良いことがわかり，レポートの完成に至った。ここで両名に感謝を申し上げたい。

《参考文献》

〔１〕 改訂版　チャート式　数学Ⅲ(赤チャート)　数研出版　P360，P374，P424

〔２〕 解析概論改訂第三版　高木貞治著　岩波書店　P181－P183

(広島県　広島市立基町高等学校)