両替問題から因数分解へ

内藤（ないとう）　康正（やすまさ）

§1. 両替の問題

『数研通信』No.92 に，高木勝久先生が「両替の問題」と題して次の問題 1（本稿でも両替問題と呼ぶことにします）とその解答について論考されていました。

> **問題 1**　（問題集「4STEP　数学ＩＡ」）
> 次の場合，硬貨の一部または全部を使って支払うことのできる金額は何通りあるか。
> (1)　10 円玉 4 枚，50 円玉 1 枚，100 円玉 3 枚
> (2)　10 円玉 2 枚，50 円玉 3 枚，100 円玉 3 枚
> (3)　10 円玉 7 枚，50 円玉 1 枚，100 円玉 3 枚

解答の概略は次のようになっており，特に(2)と(3)の両替方法の違いに生徒が混乱しているという問題提起でした。

(1)　$(4+1)(1+1)(3+1)-1=39$（通り）

(2)　100 円玉 3 枚を 50 円玉 6 枚と両替して，10 円玉 2 枚，50 円玉 9 枚と考えて
$(2+1)(9+1)-1=29$（通り）

(3)　すべての硬貨を 10 円玉に両替して 10 円玉 42 枚の支払い可能金額を考えて　42 通り　■

(1)は自然数の約数の個数を数える問題の類題ですが相違点もあり，慣れないうちは慎重な立式が求められます。ところが，(2)(3)で支払い方法に重複が生じる部分については，積の法則を使わない方向に向かいます。実質的には支払い可能金額を列挙すれば十分であって，問題が進むにつれて数学的工夫はしないという“未知の体験”をするわけです。一方で「両替という作業をしないと解けない」問題という錯覚に悩まされるのではないかという気がします。この種の両替問題は付き合いにくい問題のようです。

ただ，他の問題とは一味違った面白い問題だと感じます。この機会にいろいろな解法の比較や発展的な学習の可能性について，小文にまとめてみようと思った次第です。

なお，本稿では，本来 1 通りと数えるべきものを複数通りに数えることを一律にダブルカウントと呼ぶことにします。

§2.　2 種類の解答方法

まず問題 1 (2)について問題集『4STEP』の解答を見ると，次のような記述式解答が載っていました。

問題 1 (2)の解答 A（4STEP）

> 100 円硬貨 1 枚と 50 円硬貨 2 枚は同じ金額を表すから，100 円硬貨は 50 円硬貨 6 枚と考えると，10 円硬貨 2 枚，50 円硬貨 9 枚となる。
> 10 円硬貨の使い方は 0 枚～ 2 枚の　3 通り
> 50 円硬貨の使い方は 0 枚～ 9 枚の　10 通り
> ただし，全部 0 枚の場合は支払うことができない。
> よって，支払える金額は $3\times10-1=29$（通り）

この解答 A を一読して，100 円硬貨 1 枚と 50 円硬貨 2 枚が同じ金額を表すとなぜ「100 円硬貨 4 枚と 50 円硬貨 1 枚」ではなく「50 円硬貨 6 枚」なのか，読み取ることができませんでした。ただ，調べてみると

「異なる種類の硬貨を用いて同一の金額が表せるときは，額の小さい硬貨に両替する」

という“決まり”に従えば必ず答えが出せるため，生徒にとって心強い解法だと感じました。

さて，筆者は金額問題に対して「支払える金額を数直線上に刻んでみてはどうか」とアドバイスをすることにしています。

すると多くの生徒が最初に 100 円，200 円，300 円の位置に印を入れます（図 1 ）。

図 1

次に50円玉を3枚使うことで新たに支払い可能になる金額の箇所に印を入れます(図2)。この作業を通して，ダブルカウントの様子は無視して，支払い可能な金額を列挙する方が早いことを感じ取ることができます。

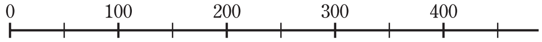

図2

最後に，10円玉2枚を使うことで新たに支払い可能になる金額の箇所に印を入れて完成です(図3)。

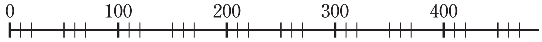

図3

この結果をどのように解答に記述するかは生徒の自由ですが，数研出版の別の問題集サクシードには，この数え方に近い次のような解答が載っています。

問題1(2)の解答B(サクシードに倣った表現)

> 100円硬貨3枚と50円硬貨3枚を使ってできる金額は0円も含めると0円から450円まで50円刻みの10通りある。
>
> そのおのおのについて，10円硬貨2枚を使ってできる金額は0円，10円，20円の3通りある。よって，積の法則により
>
> $3\times10=30$(通り)　(※)
>
> 求める場合の数は，0円の場合を除いて
>
> $30-1=29$(通り)

つり銭のないように買い物をしたいとき，財布の中からは額の大きな硬貨・紙幣を先に出すと思います。その普通の数え方による解法Bを生徒に勧めることにしています。(個人的には(※)の位置に「この30通りの中には重複した金額はない」の一言があると良い，と付け加えています。)

実は，解法Bには解法Aより優れた点があると感じています。その理由を，節を改めて述べたいと思います。

§3. 両替方式の弱点

場合の数や確率は大学入試の頻出分野ですが，差がつきそうな問題の多くは与えられたルールに従って素直に数え上げることができるかが問われている気がします。少し古い問題ですが，次の問題2は両替問題の経験が活かせる好例です。

> **問題2**　2007年度センター試験・一部・表現改
>
> 1辺の長さが1の正六角形の1つの頂点Aから出発して辺上を移動する点Pは，さいころの出た目の数の距離だけ次々と反時計回りに移動しては止まる。
>
> さいころを3回振ったときちょうど2回だけ頂点Aに止まる確率を求めよ。

解答は次のようになります。

(i)　1回目と2回目に頂点Aに止まり
3回目には止まらない場合
1回目に6の目
2回目に6の目
3回目に6以外の目
したがって　5通り

(ii)　1回目と3回目に頂点Aに止まり
2回目には止まらない場合
1回目に6の目
2回目に6以外の目 x
3回目に $6-x$ の目
したがって　5通り

(iii)　2回目と3回目に頂点Aに止まり
1回目には止まらない場合
1回目に6以外の目 x
2回目に $6-x$ の目
3回目に6の目
したがって　5通り

(i)(ii)(iii)は排反であるから，求める確率は

$$\frac{5+5+5}{216}=\frac{5}{72}$$ ■

止まるときの目，止まらないときの目をきちんと数えるだけですが，こうした作業に役立つ練習は解答Bの方ではないでしょうか。両替方式による解答Aは，定型的な両替問題のためのスペシャルな解法であるために，応用が利きづらい欠点があるように思えるのです。

§4. 場合分けによる解法

次に，場合分けによる数え上げも考えてみたいと思います。

説明のために5円玉3枚，10円玉2枚での支払い可能金額を10円玉の枚数で場合分けして列挙してみます。

（i） 10円玉を2枚使う場合

20円，25円，30円，35円

（ii） 10円玉を1枚使う場合

10円，15円，20円，25円

（iii） 10円玉を0枚使う場合

0円， 5円，10円，15円

ダブルカウントする金額の列がそろうようにずらしながら並べなおすと図4のようになります（単位の円は省略）。

（i）					20	25	30	35
（ii）			10	15	20	25		
（iii）	0	5	10	15				
	0	5	10	15	20	25	30	35

図4

下段に並んだ金額から，7通りという答えを得ます。図4と，多項式の展開

$$(1+x^5+x^{10}+x^{15})(1+x^{10}+x^{20})$$
$$=1+x^5+2x^{10}+2x^{15}+2x^{20}+2x^{25}+x^{30}+x^{35}$$

の筆算を比較すると同じ構造をしています。金額が指数部分に現れていますが，さらにその金額の支払い方法が何通りあるかが係数から読み取れます。

$$\begin{array}{r}
1+x^5+x^{10}+x^{15} \\
1+x^{10}+x^{20} \\
\hline
x^{20}+x^{25}+x^{30}+x^{35} \\
x^{10}+x^{15}+x^{20}+x^{25} \quad\quad\quad\quad\quad\quad \\
1+x^5+x^{10}+x^{15} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \\
\hline
1+x^5+2x^{10}+2x^{15}+2x^{20}+2x^{25}+x^{30}+x^{35}
\end{array}$$

この，ずらして列挙する方式で5円玉7枚，10円玉4枚の場合の両替問題を解いてみたいと思います。

筆算は係数だけで行えば十分ですから次のように8個の1「1 1 1 1 1 1 1 1」（5円玉が0枚～7枚の8通り）を2桁ずつ（5円玉2枚で10円相当）ずらして5回並べればOKです。

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1&1&1&1&1&1&1&1 \\
 & & & & & & 1&1&1&1&1&1&1&1 & & \\
 & & & & 1&1&1&1&1&1&1&1 & & & & \\
 & & 1&1&1&1&1&1&1&1 & & & & & & \\
1&1&1&1&1&1&1&1 & & & & & & & & \\
\hline
1&1&2&2&3&3&4&4&4&4&3&3&2&2&1&1
\end{array}$$

5円玉だけで支払える7通り（最下段の網掛け部分。0円を除いている。）に，10円玉を1枚増やすごとに2通りずつ（右側の網掛け部分）支払い可能金額が増えますから，求める数は $7+2\times4=15$（通り）です。

5円玉 n 枚，10円玉 m 枚とすればこの計算は $(n+2m)$ 通りとなり，10円玉 m 枚を5円玉 $2m$ 枚に両替したのと結果が一致します。同じ $n+2m$ でも，解釈が違うところが興味深いと感じます。

§5. 母関数の練習問題

§4の多項式の計算は，母関数の計算に他なりません。このように，両替問題は母関数のアイディアを紹介するチャンスになります。母関数の計算では，その金額が何通りの方法で支払えるかが係数に現れました。そこに注目した問題を考えていきます。適宜，架空の硬貨（2円玉，3円玉など）を用意することにします。

合計7円相当の1円玉と2円玉では，次のような計算が考えられます。

・1円玉1枚と2円玉3枚のとき

$$(1+x)(1+x^2+x^4+x^6)$$
$$=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7 \quad \cdots\cdots①$$

・1円玉3枚と2円玉2枚のとき

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4)$$
$$=1+x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5+x^6+x^7 \quad \cdots\cdots②$$

・1円玉5枚と2円玉1枚のとき

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x^2)$$
$$=1+x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5+x^6+x^7 \quad \cdots\cdots③$$

いずれも7通りの金額が支払い可能ですが，②と③では展開式の結果が一致していますから，各金額の支払い方法の数まで一致していることが分かります。計算上は②と③については

$$(1+x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4)$$
$$=(1+x)(1+x^2)(1+x^2+x^4)$$
$$=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x^2)$$

という変形ができるということです。

このように，支払い可能金額が同じであるだけでなく，その額の支払い方法が何通りかまで一致する場合をここでは「支払い能力が一致」と呼ぶことにします。両替問題は，支払い能力の一致問題に発展させると一気に魅力が増します。

生徒に向けては（母関数について上で述べた程度の考え方を紹介できれば）次のような練習問題が可能ではないかと考えてみました。

問題 3

$(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^5)(1+x^2+x^4+x^6)$ を変形して,「1円玉5枚と2円玉3枚」と支払い能力が一致する硬貨の枚数の組合せを求めよ。

解答例

$$\begin{aligned}&(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^5)(1+x^2+x^4+x^6)\\&=(1+x^2+x^4)(1+x)\cdot(1+x^2+x^4+x^6)\\&=(1+x^2+x^4)(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^7)\end{aligned}$$

より,1円玉7枚と2円玉2枚と支払い能力が一致する。さらに

$$=(1+x^2+x^4)(1+x+x^2+x^3)(1+x^4)$$

とすれば,「1円玉3枚,2円玉2枚,4円玉1枚」とも一致する。 ■

入学したての生徒にとって公式に当てはめるだけの無味乾燥な因数分解が,まるで生き物のように見えてくるこの計算は新鮮な経験になるのではないかと思います。また,この結果を確かめるべく具体的に列挙する作業は,楽しみながら数え上げるトレーニングになります。例えば簡単のため $5=1^5$, $1^3 2$, 12^2 で,5円を支払う方法が1円玉5枚,1円玉3枚と2円玉1枚,1円玉1枚と2円玉2枚の3通りであることを表すことにすると,次のようになります。

・1円玉5枚と2円玉3枚の場合

$1=1$
$2=1^2$, 2
$3=1^3$, 12
$4=1^4$, $1^2 2$, 2^2
$5=1^5$, $1^3 2$, 12^2
$6=1^4 2$, $1^2 2^2$, 2^3
$7=1^5 2$, $1^3 2^2$, 12^3
$8=1^4 2^2$, $1^2 2^3$
$9=1^5 2^2$, $1^3 2^3$
$10=1^4 2^3$
$11=1^5 2^3$

・1円玉3枚,2円玉2枚,4円玉1枚の場合

$1=1$
$2=1^2$, 2
$3=1^3$, 12
$4=1^2 2$, 2^2, 4
$5=1^3 2$, 12^2, 14
$6=1^2 2^2$, $1^2 4$, 24
$7=1^3 2^2$, $1^3 4$, 124
$8=1^2 24$, $2^2 4$
$9=1^3 24$, $12^2 4$
$10=1^2 2^2 4$
$11=1^3 2^2 4$

問題 4

$1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^{19}$ を因数の積に分解し,その結果を,1円玉,5円玉,10円玉を用いた支払い能力に関して説明せよ。

解答例

$$\begin{aligned}&1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^{19}\\&=(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^9)\\&\quad+x^{10}(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^9)\\&=(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^9)(1+x^{10})\\&=(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x^5)(1+x^{10})\end{aligned}$$

これは,1円玉19枚が,1円玉4枚,5円玉1枚,10円玉1枚と支払い能力が一致することを示している。 ■

1円玉19枚は答えのように両替したいという当たり前のことが計算によって導かれます。また,20項もの多項式の因数分解は生徒によっては一生に一度きりの経験かも知れません。因数分解は公式ではなく,共通因数を見つけるという単純な方針で成り立っているということも実感できます。

問題 5

次の展開の計算の続きを考えることによって,どのようなことが導かれるか,考察せよ。

$$\begin{aligned}&(1+x)(1+x^2)=1+x+x^2+x^3\\&(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\\&=1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^7\\&\cdots\cdots\end{aligned}$$

解答例

$$\begin{aligned}&(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\times\cdots\cdots\\&=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots\cdots\end{aligned}$$

と考えられるから,

1円玉,2円玉,4円玉,8円玉,……

が1枚ずつあれば,すべての金額がただ1通りに支払えるといえる。 ■

数学Aで学ぶ2進法の先取りですが,記数法として形式的に学ぶ2進法と違い,実感が伴った2進法の紹介になると思います。

§6. 結びにかえて

整数の分割に関して，２つの多項式

$$F(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\times\cdots\cdots$$

$$G(x)=(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots)\times(1+x^3+x^6+x^9+\cdots\cdots)\times(1+x^5+x^{10}+x^{15}+\cdots\cdots)\times\cdots\cdots$$

はいずれも

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+\cdots\cdots$$

になるという有名な性質があります。これは「１円玉，２円玉，３円玉，……が１枚ずつ」と「１円玉，３円玉，５円玉，……がそれぞれ十分な枚数」は支払い能力が一致するという興味深いことを示しています。$F(x)$ から $G(x)$ を導く変形は

$$F(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\times\cdots\cdots$$

$$=\frac{1-x^2}{1-x}\times\frac{1-x^4}{1-x^2}\times\frac{1-x^6}{1-x^3}\times\frac{1-x^8}{1-x^4}\times\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{1-x}\times\frac{1}{1-x^3}\times\frac{1}{1-x^5}\times\cdots\cdots=G(x)$$

というものです。

一見乱暴な計算ですが，かの数学者オイラーは，このような計算を好んで行ったといいます。高校生にとって特段の予備知識なく数学の醍醐味を味わうことのできる素材だと思います。

両替問題を平素の授業でここまで扱うことは不可能ですが，生徒の実態に応じた自習プリントを作っておくなどの工夫をするだけの価値がある問題だと思います。

《参考文献》

〔１〕 数研出版　改訂版 4STEP 数学Ⅰ＋A

〔２〕 数研出版　改訂版サクシード数学Ⅰ＋A

〔３〕『数研通信』92 号　髙木勝久『両替の問題』

〔４〕 理系への数学 2006 年３月号
内藤　康正『母関数と出逢う（第３回）』

（東京都立立川高等学校）