36° の三角比と図形的背景を巡って

大谷（おおたに）　昌範（まさのり）

§1. はじめに

36° $\left(=\dfrac{\pi}{5}\right)$，18° $\left(=\dfrac{\pi}{10}\right)$ などの三角比は，教科書等で必ずしも大きく扱われていないこともあり，学習上の盲点になっていると思う。

筆者がこの教材の重要性を感じたのは，受験指導のときであった。36° などの三角比を問う問題は，毎年どこかの大学で出題されているが，３倍角の公式を用いる点など，初見で解くには難しい。実際，医学部や薬学部の入試で見かけることが多い。

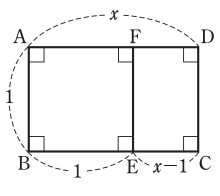
しかし，時に試験範囲が数学ⅠＡのみである看護学部などの入試でも見受けられる(例えば，2017 年の帝京平成大)。その場合は，黄金比の性質を利用しながら，図形的に導くことになる。ただ，誘導があったとしても，初見では難しいと感じる。生徒たちには幾何等を通じて，どのような所に黄金比が現れるのかや，36° 関係の三角比の導き出し方にも知識として伝えておきたいものである。

本稿は，このような 36° の三角比に関連した話題について，個人的に調べたことを少しまとめてみた。

§2. 黄金比について

黄金比について，簡単にまとめておこう。**黄金比**とは，線分 AB を AB：AC＝AC：BC となるように，点Ｃで内分したときの AC と BC の比のことである。また，線分を黄金比に分割することを**黄金分割**という。

図形的には，次の図のように，正方形を切り離して得られる残りの長方形が，元の長方形と相似になる長方形に黄金比が現れる。長方形 ABCD において AB＝1，AD＝x とする。長方形 ABCD から AB を１辺とする正方形 ABEF を切りとると，長方形 ABCD と長方形 ECDF は相似より，



$$AB：AD＝EC：EF\quad \text{つまり}\quad 1：x＝(x-1)：1$$

$$x(x-1)=1 \qquad x^2-x-1=0$$

この方程式を解けば，　$x>0$ より　$x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

この値が黄金比であり，ϕ で表すこともある。

なお，黄金比 ϕ は，この方程式の解だから，

$\phi^2-\phi-1=0$ ……(☆) を満たす。

§3. 三角関数による解法

本題に入る前に，まず三角関数による解法を，簡単にまとめておこう。

一例として $\cos 36°$ を求めてみる。$\theta=36°$ として，$\sin 2\theta=\sin 3\theta$ を解く。

２倍角および３倍角の定理から

$$2\sin\theta\cos\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

$\sin\theta\neq 0$ より，両辺を $\sin\theta$ で割り，

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$ により整理すると，

$4\cos^2\theta-2\cos\theta-1=0$ を得る。この方程式を解けば，$\cos 36°=\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$ を導くことが出来る。これは $\theta=36°$ が $2\theta=180°-3\theta$ であることと，

$\sin A=\sin(180°-A)$ という性質を利用した定式化である。更に半角の公式から，$\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ が導ける。

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
$18°=\dfrac{\pi}{10}$	$\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$
$36°=\dfrac{\pi}{5}$	$\dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	$\dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

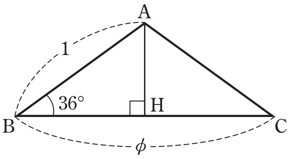
§4. 黄金三角形による解法

それでは三角関数を使わずに，図形から求めるにはどのようにすればよいのだろうか。それは，次の図のような底角が 36° および，72° の二等辺三角形を用いる。図にあるように辺の長さに，黄金比

$\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ が現れるので，**黄金三角形**と呼ばれる(〔1〕)。

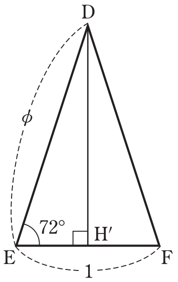
これを認めれば，$\cos 36°$ と $\cos 72°$ は次のように求められる。

① △ABC において，A から BC に垂線 AH を下ろすと



$$\cos 36°=\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{AB}}$$
$$=\frac{1+\sqrt{5}}{4}\left(=\frac{\phi}{2}\right)$$

② △DEF において，D から EF に垂線 DH′ を下ろすと



$$\cos 72°=\frac{\mathrm{EH'}}{\mathrm{DE}}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{5}-1}{4}\left(=\frac{\phi^{-1}}{2}\right)$$

「$\cos 36°$ は**黄金比の半分**」，
「$\cos 72°$ は**黄金比の逆数の半分**」ととらえておくと記憶しやすいと思う。

入試では，黄金三角形からこの黄金比を求めていくのが，主要テーマになる。このことを §5 で見ていこう。

なお §2 で扱った(☆)から，$\phi^{-1}=\phi-1$ より $\cos 72°=\dfrac{\phi-1}{2}$ とも表せる。

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
$18°=\dfrac{\pi}{10}$	$\dfrac{1}{2\phi}=\dfrac{\phi-1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2+\phi}}{2}$
$36°=\dfrac{\pi}{5}$	$\dfrac{\sqrt{3-\phi}}{2}$	$\dfrac{\phi}{2}$
$54°=\dfrac{3}{10}\pi$	$\dfrac{\phi}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3-\phi}}{2}$
$72°=\dfrac{2}{5}\pi$	$\dfrac{\sqrt{2+\phi}}{2}$	$\dfrac{1}{2\phi}=\dfrac{\phi-1}{2}$

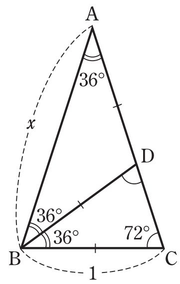
また，$\sin\dfrac{2}{5}\pi$ と $\sin\dfrac{\pi}{5}$ の比は，黄金比になっている。実際，

$$\frac{\sin\frac{2}{5}\pi}{\sin\frac{\pi}{5}}=\frac{\sqrt{2+\phi}}{\sqrt{3-\phi}}=\frac{2+\phi}{\sqrt{(3-\phi)(2+\phi)}}$$
$$=\frac{2+\phi}{\sqrt{6+\phi-\phi^2}}$$
$$=\frac{2+\phi}{\sqrt{5}}\quad(\phi^2=\phi+1\ \text{より})$$
$$=\frac{5+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi$$

§5. 黄金三角形の辺の長さの求め方

それでは，黄金三角形の辺の長さを求めてみよう。実際の入試問題では，底角が 72° の黄金三角形に補助線を引いて，辺の長さを利用して，$\cos 72°$ を求めさせることが多い。

図のように BC=1 である二等辺三角形 ABC において，∠B の二等分線を引き，辺 AC との交点をDとする。△ABC∽△BCD となるので，AB=x とおけば AB：BC=BC：CD つまり，$x:1=1:(x-1)$ より 2 次方程式 $x^2-x-1=0$ を導くことができる。



これを解いて，$x>0$ より $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ を得る。

一例として，入試問題(〔2〕，問 203)を引用する。

> AB=AC，BC=1，∠ABC=72° の三角形 ABC を考える。∠ABC の二等分線と辺 AC の交点をDとする。
> (1) AD の長さと AC の長さを求めよ。
> (2) $\cos 72°$ を求めよ。
> (3) 三角形 ABD の内接円の半径を r，三角形 CBD の内接円の半径を s とするとき，$\dfrac{r}{s}$ の値を求めよ。　〔09 大阪教育大〕

(3)は 2 つの三角形について，内接円の半径の比を考える問題だが，△ABD と △CBD の面積比は黄金比となるが(AD：DC=ϕ：1 より)，内接円の半径の比については $\dfrac{r}{s}=\dfrac{3\sqrt{5}+5}{10}$ である。無理に解釈すれば，$\dfrac{r}{s}=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\phi^2}{\sqrt{5}}$ になっている。

§6. 黄金三角形と正五角形

§4 で紹介した 2 種類の黄金三角形は，正五角形に現れる。教科書等では，黄金比は正五角形の文脈

で紹介されていることが多い。

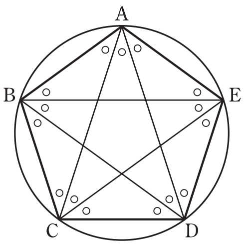


図1

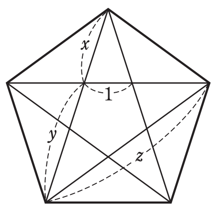


図2

図1のように，正五角形に対角線を引いてみると，相似な黄金三角形が何か所も見て取れる。正五角形に現れる角は36°の整数倍である。図1中の○は$\frac{\pi}{5}=36^\circ$ を表す。

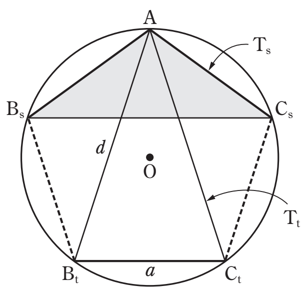
なお，正五角形において，1辺の長さと対角線の長さの比は黄金比になっている。

$$\boxed{\frac{(\text{対角線の長さ})}{(1\text{辺の長さ})}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\phi}$$

また，正五角形には辺と対角線だけではなく，図2のxとy，yとzの比も黄金比となっていることにも注意しておきたい。最後に黄金三角形における，その他の黄金分割について，海外の研究〔3〕から紹介する。

§7. 黄金三角形に見出される様々な黄金比

論文〔3〕に従って，2種類の黄金三角形のうち，底角72°の方を背の高い(tall)黄金三角形という意味でT_t(図では$\triangle AB_tC_t$)とし，底角36°の方を背の低い(short)黄金三角形という意味でT_s(図では$\triangle AB_sC_s$)とする。



これら2種類の黄金三角形T_tとT_sが同一の外接円を共有しているとき，様々な黄金分割が見出される。

外接円の半径をR，円に内接する正五角形の1辺の長さをa，対角線の長さをdとする。

① **T_tとT_sの面積比は黄金比**

$$\frac{T_t}{T_s}=\frac{\frac{1}{2}ad\sin 72^\circ}{\frac{1}{2}a^2\sin 108^\circ}=\frac{d\sin 72^\circ}{a\sin 72^\circ}=(\text{黄金比 }\phi)$$

次に，T_tの内心，垂心をそれぞれI_t，H_tとし，T_sの方をそれぞれI_s，H_sとする。図1，図2中の×は$18^\circ=\frac{\pi}{10}$ を表す。

② **内心I_sは線分H_sOを黄金比に分ける**

$\triangle H_sB_sO$は底角72°の黄金三角形より

$$\frac{B_sH_s}{B_sO}=\phi \qquad (*)$$

$\triangle H_sB_sO$において，B_sI_sは$\angle H_sB_sO$の二等分線より

$$\frac{H_sI_s}{I_sO}=\frac{B_sH_s}{B_sO}=\phi$$

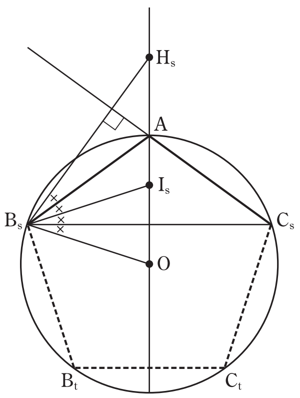


図1

③ **点Aは線分H_sI_sを黄金比に分ける**

$B_sI_s=B_sO$ より，$\triangle B_sI_sH_s$において，B_sAは$\angle I_sB_sH_s$の二等分線より

$$\frac{H_sA}{AI_s}=\frac{B_sH_s}{B_sI_s}=\frac{B_sH_s}{B_sO}=\phi \quad (②\text{の式}*\text{より})$$

④ **内心I_tは線分OH_tを黄金比に分ける**

直線OAと円周との交点のうち点Aではない方を，A′としておく(図2)。

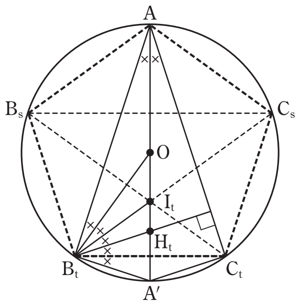


図 2

まず $B_tH_t=\dfrac{R}{\phi}$ を確認する。実際，

$\angle H_tB_tC_t=\angle A'B_tC_t=\dfrac{\pi}{10}$ に注意すれば，

$\triangle B_tA'H_t$ は二等辺三角形である。§4 から $\sin 18°=(2\phi)^{-1}$ より

$$B_tH_t=B_tA'=AA'\sin 18° \qquad (**)$$
$$=2R\times\frac{1}{2\phi}=\frac{R}{\phi}$$

さて $\triangle B_tH_tO$ において，B_tI_t は $\angle OB_tH_t$ の二等分線より

$$\frac{OI_t}{I_tH_t}=\frac{B_tO}{B_tH_t}=\frac{R}{R/\phi}=\phi$$

⑤　**点 A は，H_tO を黄金比に分ける**

$$AH_t=2R-2B_tH_t\sin 18°$$
$$=2R-4R\sin^2 18°=2R(1-2\sin^2 18°)$$
（④の式＊＊から $B_tH_t=2R\sin 18°$）
$$=2R\cos 36° \text{ より } \frac{AH_t}{AO}=\frac{2R\cos 36°}{R}=\phi$$

⑥　**点 O は I_sI_t を黄金比に分ける**

線分 B_sC_s に関して，点 I_t は点 A と，点 O は点 I_s とそれぞれ対称であるから　$OI_t=AI_s$

よって

$$\frac{I_sO}{OI_t}=\frac{I_sO}{AI_s}=\frac{2R\sin 18°}{R-2R\sin 18°}=\frac{2\cdot 1/2\phi}{1-2\cdot 1/2\phi}=\frac{1}{\phi-1}$$
$$=\frac{\phi}{\phi^2-\phi}=\phi \quad (\phi^2-\phi=1 \text{ による})$$

《参考文献》

〔1〕 H. ヴァルサー 著(蟹江幸博 訳)，黄金分割，日本評論社，2002

〔2〕 改訂版メジアン数学演習 Ⅰ・Ⅱ・A・B 受験編，数研出版

〔3〕 E.A.J.García, P.Yiu, Golden Sections of Triangle Centers in the Golden Triangles, Forum Geom.,16 (2016) 119−124

（神奈川県　湘南工科大学附属高等学校）