$a^3+b^3+c^3-3abc$ の因数分解の応用について

柳田　五夫

§1. はじめに

$a^3+b^3+c^3-3abc$ の因数分解を，数Ⅱの教科書では章末の演習問題で次のように扱っている。

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ であることを用いて，$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ。

（数研出版　高等学校　数学Ⅱ）

ここでは，次の問題の解法に注目して $a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解したい。

問題 1　$a+b+c=s$, $ab+bc+ca=t$, $abc=u$ のとき，$a^3+b^3+c^3$ を s, t, u で表せ。

解　a, b, c は $x^3-sx^2+tx-u=0$ の 3 つの解であるから

$$a^3-sa^2+ta-u=0$$
$$b^3-sb^2+tb-u=0$$
$$c^3-sc^2+tc-u=0$$

等式の辺々を加えると

$$a^3+b^3+c^3-s(a^2+b^2+c^2)+t(a+b+c)-3u=0$$
$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=s^2-2t$$

を使うと

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3&=s(a^2+b^2+c^2)-t(a+b+c)+3u\\&=s(s^2-2t)-ts+3u\\&=s^3-3st+3u\end{aligned}$$ ■

問題 2　$a^3+b^3+c^3-3abc$ を因数分解せよ。

問題 1 の結果を使うこともできるが，問題 1 の解法にならうと次のように解ける。

解　a, b, c は

$$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc=0$$

の 3 つの解であるから

$$a^3-(a+b+c)a^2+(ab+bc+ca)a-abc=0$$
$$b^3-(a+b+c)b^2+(ab+bc+ca)b-abc=0$$
$$c^3-(a+b+c)c^2+(ab+bc+ca)c-abc=0$$

等式の辺々を加えると

$$a^3+b^3+c^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)+(ab+bc+ca)(a+b+c)-3abc=0$$

よって

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3-3abc\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)(a+b+c)\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\end{aligned}$$ ■

$x^3+y^3-3xy+1$ や $a^3-8b^3+12ab+8$ の因数分解の問題が傍用問題集に載っているが，$x^3+y^3-3xy+1=x^3+y^3+1^3-3x\cdot y\cdot 1$ と見抜けるようになりたい。

問題 3　a, b, c を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$a+b=c$　であるとき，$a^3+b^3+3abc=c^3$ が成り立つことを示せ。

(2)　$a+b\geqq c$　であるとき，$a^3+b^3+3abc\geqq c^3$ が成り立つことを示せ。　（2009　東北大）

(2)は，公式

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+c^3-3abc\\&=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)\\&=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\end{aligned}$$

を利用して

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+3abc-c^3\\&=a^3+b^3+(-c)^3-3ab(-c)\\&=(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)\\&=\frac{1}{2}(a+b-c)\{(a-b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}\end{aligned}$$

と変形すればよい。

§2. $a+b+c=0$ のとき $a^3+b^3+c^3=3abc$ が成り立つことの応用 1

問題 4　$a+b+c=0$ のとき

$$a^3+b^3+c^3=3abc$$

が成り立つことを示せ。

解　$a+b+c=0$ のとき

$a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0$

から $a^3+b^3+c^3=3abc$ が成り立つ。 ■

問題 4 の結果の応用については $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ の因数分解が有名であるが，ここではあまり知られていないことに応用したい。

> **問題 5**　実数の間の等式
>
> $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$ ……(＊)
>
> を以下の手順に従って示せ。
>
> (1) 係数が整数である x の 3 次方程式で $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ が解になるものを 1 つ求めよ。
>
> (2) (1)で求めた 3 次方程式を解くことにより，等式(＊)を証明せよ。 (2009 東北大)

解 (1) $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ から

$x-\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}+\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=0$

問題 4 の結果より

$x^3-(5\sqrt{2}+7)+(5\sqrt{2}-7)$

$=-3x\sqrt[3]{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-7)}$

$x^3-14=-3x$ すなわち $x^3+3x-14=0$ が求める 3 次方程式である。

(2) (1)より $x^3+3x-14=0$

左辺を因数分解すると

$(x-2)(x^2+2x+7)=0$

$x=2,\ -1\pm\sqrt{6}\,i$

x は実数であるから，$x=2$ となり，等式(＊)は成り立つ。 ■

［注］ (1)は x^3 を展開して解いてもよいが，こちらの解法のほうが楽に解ける。

§3. $a+b+c=0$ のとき $a^3+b^3+c^3=3abc$ が成り立つことの応用 2

次の問題はいわゆる無限降下法の問題であるが，$a+b+c=0$ のとき $a^3+b^3+c^3=3abc$ が成り立つことを利用して，問題 8 と関連づけられる。

> **問題 6**　$p,\ q,\ r$ は整数で
>
> $p^3+2q^3+4r^3=6pqr$ ならば $p=q=r=0$
>
> であることを示せ。

解 $p^3+2q^3+4r^3=6pqr$ ……①

とおく。$(p,\ q,\ r)\neq(0,\ 0,\ 0)$ となる解 $(p_0,\ q_0,\ r_0)$ が存在したとすると $(-p_0,\ -q_0,\ -r_0)$ も①の解になるから $\max(p_0,\ q_0,\ r_0)>0$ と仮定してもよい。

$A=\{\max(p,\ q,\ r)\,|\,\max(p,\ q,\ r)>0,$ $p^3+2q^3+4r^3=6pqr\}$ とおくと A は正の整数からなる集合で，$\max(p_0,\ q_0,\ r_0)\in A$ だから，$A\neq\phi$

よって，A は最小の要素をもつ。これを $\max(p_1,\ q_1,\ r_1)$ とすると

$p_1{}^3+2q_1{}^3+4r_1{}^3=6p_1q_1r_1$ ……②

②を変形すると $p_1{}^3=2(3p_1q_1r_1-q_1{}^3-2r_1{}^3)$ は偶数となるから，p_1 は偶数で $p_1=2p_2$ (p_2 は整数) とかける。これを②に代入して整理すると

$4p_2{}^3+q_1{}^3+2r_1{}^3=6p_2q_1r_1$ ……③

q_1 は偶数で $q_1=2q_2$ (q_2 は整数) とかける。これを③に代入して整理すると

$2p_2{}^3+4q_2{}^3+r_1{}^3=6p_2q_2r_1$ ……④

r_1 は偶数で $r_1=2r_2$ (r_2 は整数) とかける。これを④に代入して整理すると

$p_2{}^3+2q_2{}^3+4r_2{}^3=6p_2q_2r_2$ ……⑤

$p_2=\dfrac{p_1}{2},\ q_2=\dfrac{q_1}{2},\ r_2=\dfrac{r_1}{2}$ であったから，

$0<\max(p_2,\ q_2,\ r_2)<\max(p_1,\ q_1,\ r_1)$

が成り立ち，これは $\max(p_1,\ q_1,\ r_1)$ の最小性に反する。

したがって $(p,\ q,\ r)\neq(0,\ 0,\ 0)$ となる解 $(p_0,\ q_0,\ r_0)$ は存在しないから，①の解は $(p,\ q,\ r)=(0,\ 0,\ 0)$ のみである。 ■

［注］ 問題 6 の解法において

$\max(p_0,\ q_0,\ r_0)>0$ と仮定しない場合は次のように考えてもよい。

$p,\ q,\ r$ の最大公約数を d とすると，$d\geqq2$ のときは①の両辺を d^3 で割って，$p'=\dfrac{p}{d},\ q'=\dfrac{q}{d},$

$r'=\dfrac{r}{d}$ とおくことにより①は

$p'^3+2q'^3+4r'^3=6p'q'r'$ ($p',\ q',\ r'$ の最大公約数は 1) とかける。したがって，最初から $p,\ q,\ r$ の最大公約数は 1 としてよい。

こうしておけば $\max(p_0,\ q_0,\ r_0)>0$ と仮定しなくとも，$(p,\ q,\ r)\neq(0,\ 0,\ 0)$ となる解 $(p_1,\ q_1,\ r_1)$ に対して $p_1,\ q_1,\ r_1$ が偶数になって矛盾が出る。

問題 6 の解法で次の問題が解ける。

> **類題**　n が3以上の整数のとき，$x^n+2y^n=4z^n$ を満たす整数 x，y，z は $x=y=z=0$ 以外に存在しないことを証明せよ。　(2000　千葉大)

> **問題7**　$\sqrt[3]{2}$ は無理数であることを示せ。

解　$\sqrt[3]{2}$ は無理数でないと仮定すると，有理数になるから $\sqrt[3]{2}=\dfrac{q}{p}$ (p と q は互いに素である正の整数) とかける。

$$2=\frac{q^3}{p^3} \text{ から } \frac{q^3}{p}=2p^2 \quad \cdots\cdots①$$

①の右辺は整数だから，①の左辺の $\dfrac{q^3}{p}$ は整数となる。p と q は互いに素だから，$p=1$ でなければならない。すなわち $\sqrt[3]{2}$ は整数となる。$1<\sqrt[3]{2}<2$ だから，1と2の間に整数があることになり矛盾。

よって，$\sqrt[3]{2}$ は無理数である。■

> **問題8**　a，b，c は有理数で
> $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ ならば $a=b=c=0$ であることを示せ。

解　$a=\dfrac{p}{n}$，$b=\dfrac{q}{n}$，$c=\dfrac{r}{n}$ (p, q, r は整数)として $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}=0$ に代入すると

$$p+q\sqrt[3]{2}+r\sqrt[3]{4}=0 \quad \cdots\cdots①$$

$x=p$，$y=q\sqrt[3]{2}$，$z=r\sqrt[3]{4}$ とおくと $x+y+z=0$ で，このとき $x^3+y^3+z^3=3xyz$ が成り立つので

$$p^3+2q^3+4r^3=6pqr \quad \cdots\cdots②$$

問題6の結果より $p=q=r=0$ すなわち $a=b=c=0$ となる。■

［**別解**］　$\alpha=\sqrt[3]{2}$ とおくと，α は無理数で，

$$\alpha^3=2,\ a+b\alpha+c\alpha^2=0$$

が成り立つ。

$c\neq0$ と仮定して，x^3-2 を $a+bx+cx^2$ で割った商を $s+tx$，余りを $u+vx$ とおくと，s，t，u，v は有理数で $t\neq0$ であり

$$x^3-2=(a+bx+c^2)(s+tx)+u+vx$$

が成り立つ。$x=\alpha$ を代入すると $u+v\alpha=0$

$v\neq0$ とすると $\alpha=-\dfrac{u}{v}$ と変形でき，α は有理数となり，無理数であることに矛盾する。

したがって，$v=0$ であり，このとき $u=0$ となるから

$$x^3-2=(a+bx+c^2)(s+tx)$$

が成り立つ。

方程式 $x^3-2=0$ は有理数解 $-\dfrac{s}{t}$ をもつことになる。$x^3-2=0$ の実数解は $\sqrt[3]{2}$ のみだから，$\sqrt[3]{2}=-\dfrac{s}{t}$ となり，$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることに矛盾する。よって，$c=0$ でなければならない。
$a+b\alpha=0$ から $a=b=0$ が出て，$a=b=c=0$ である。■

［**注**］　次のように解くこともできる。$c\neq0$ と仮定すると，$a+b\alpha+c\alpha^2=0$ より

$$\alpha^2=-\frac{b}{c}\alpha-\frac{a}{c}=s\alpha+t \quad (s,\ t \text{ は有理数})$$

とかける。この式を使うと

$$\begin{aligned}0=\alpha^3-2&=\alpha(s\alpha+t)-2\\&=s\alpha^2+t\alpha-2\\&=s(s\alpha+t)+t\alpha-2\\&=(s^2+t)\alpha+st-2\end{aligned}$$

よって，$s^2+t=0$，$st-2=0$ が成り立つ。t を消去すると $-s^3-2=0$ すなわち $(-s)^3-2=0$ より $-s$ が $x^3-2=0$ の有理数解となる。……

> **問題9**　(1)　$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ。
> (2)　$P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする。このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ。　(2012　京都大)

$P(x)$ を x^3-2 で割った商を $Q(x)$，余りを ax^2+bx+c とおくと，a，b，c は有理数で

$$P(x)=(x^3-2)Q(x)+ax^2+bx+c$$

が成り立つ。$x=\sqrt[3]{2}$ を代入すると
$a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c=0$ となり，問題8と同じ問題になる。

> **問題10**　有理数を係数とし，最高次の係数が1の x に関する多項式で，$x=1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$ のとき0になる最低次数のものを求めよ。
> (1967　一橋大)

$(x-1)+\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}=0$ だから，問題4の結果を用いると

$$(x-1)^3+2-4=-3(x-1)\sqrt[3]{2}\times\sqrt[3]{4}$$

から $x^3-3x^2+9x-9=0$ を得る。後半は京都大の(2)のように示せばよい。

§4. おわりに

東北大の問題で，３次方程式の整数解が３乗根を含む複雑な式で表される場合があることがわかったが，この理由は，３次方程式の解の公式を用いていることに原因がある。ここでは，問題２の結果を用いて解の公式を導いてみる。議論を簡単にするため，以下では，方程式の係数は実数であるものとする。

> １の３乗根のうち虚数のものを ω とおくと
> $a^3+b^3+c^3-3abc$
> $=(a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$
> が成り立つ。

$$(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)$$
$$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

が成り立つことを示せばよく，左辺を展開して，$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$ を用いればよい。

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$
$$=\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2$$

を用いて $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ を解くと

$$a=\frac{b+c}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(b-c)i$$
$$=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}b+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}c,\quad \frac{1+\sqrt{3}i}{2}b+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}c$$

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおくと $\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ で $a=-b\omega-c\omega^2$，$-b\omega^2-c\omega$ から成り立つことがわかる。

$$x^3-3uvx-u^3-v^3$$
$$=x^3+(-u)^3+(-v)^3-3x(-u)(-v)$$
$$=(x-u-v)(x-u\omega-v\omega^2)(x-u\omega^2-v\omega)$$

が成り立つから，$x^3+px+q=0$ の解は

$$3uv=-p,\quad u^3+v^3=-q \qquad \cdots\cdots①$$

を解くことによって

$$x=u+v,\quad u\omega+v\omega^2,\quad u\omega^2+v\omega$$

と求めることができる。

具体的には，①から

$$u^3+v^3=-q,\quad u^3v^3=-\frac{p^3}{27}$$

よって，u^3，v^3 は，t の２次方程式

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$$

の２つの解である。解の公式によって

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}},\quad v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

から

$$u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},\quad v=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

を得る。$x^3+px+q=0$ の解は

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{r}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{r}},$$
$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{r}}\,\omega+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{r}}\,\omega^2,$$
$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{r}}\,\omega^2+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{r}}\,\omega$$

で与えられる。ただし，$r=\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}$ とする。

これがカルダーノの公式である。

最後に，３個の場合の相加平均・相乗平均の不等式が導かれることにふれておきたい。これについては教科書にも載せられている。（数研出版　数学Ⅱ）

次の等式，不等式を証明せよ。

(1) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
$=a^3+b^3+c^3-3abc$

(2) 正の数 a，b，c に対し $a^3+b^3+c^3\geqq 3abc$

《参考文献》

〔１〕　数研出版 改訂版　高等学校　数学Ⅱ

〔２〕　数研出版 改訂版　数学Ⅱ

（元　栃木県　佐野日本大学中等教育学校）