実数係数の3次方程式の「解の公式」作成とその使い方

澤幡（さわはた）　通正（みちまさ）

§1．解の公式

xについての3次方程式

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad \cdots\cdots(*)$$

の解の公式を作成する。ただし，係数はすべて実数とする。

$x=y-\dfrac{b}{3a}$ とおいて$(*)$をyの3次方程式に変換する。

$$a\left(y-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(y-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(y-\frac{b}{3a}\right)+d=0$$

展開して整理すると

$$ay^3+\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)y+\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d=0$$

$a\neq 0$ であるから

$$y^3+\frac{1}{a}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right)y+\frac{1}{a}\left(\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d\right)=0 \quad \cdots\cdots①$$

①の形から3次方程式$(*)$は

$$y^3+Ay+B=0 \quad \cdots\cdots②$$

の形の3次方程式が解ければよいことが分かる。

ここで，l，mを実数とするとき，恒等式

$$y^3-3lmy+l^3+m^3$$
$$=(y+l+m)\{y^2-(l+m)y+l^2-lm+m^2\} \quad \cdots\cdots③$$

が成り立つから，③の左辺と②の左辺を比較すると，

$$\begin{cases} -3lm=A & \cdots\cdots④ \\ l^3+m^3=B & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$$

④より，$lm=-\dfrac{A}{3}$ として，両辺を3乗すると

$$l^3m^3=-\frac{A^3}{27} \quad \cdots\cdots⑥$$

⑤，⑥より，l^3，m^3は2次方程式

$$t^2-Bt-\frac{A^3}{27}=0 \quad \cdots\cdots⑦$$

の実数解である。

よって，

$$l^3=\frac{B-\sqrt{B^2+\dfrac{4A^3}{27}}}{2},\quad m^3=\frac{B+\sqrt{B^2+\dfrac{4A^3}{27}}}{2}$$

としても一般性を失わない。

l，mは実数であるから

$$l=\sqrt[3]{\frac{B-\sqrt{B^2+\dfrac{4A^3}{27}}}{2}},$$

$$m=\sqrt[3]{\frac{B+\sqrt{B^2+\dfrac{4A^3}{27}}}{2}}$$

よって，③より，②の解は

$$y=-l-m,\quad \frac{l+m\pm\sqrt{3}\,(l-m)i}{2}$$

ただし

$$l=\sqrt[3]{\frac{B-\sqrt{B^2+\dfrac{4A^3}{27}}}{2}},$$

$$m=\sqrt[3]{\frac{B+\sqrt{B^2+\dfrac{4A^3}{27}}}{2}}$$

したがって，3次方程式$(*)$の解は

$$x=-\frac{b}{3a}-l-m,\quad -\frac{b}{3a}+\frac{l+m\pm\sqrt{3}\,(l-m)i}{2}$$

ただし，

$$A=\frac{1}{a}\left(c-\frac{b^2}{3a}\right),\quad B=\frac{1}{a}\left(\frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d\right)$$

のとき，

$$l=\sqrt[3]{\frac{B-\sqrt{B^2+\dfrac{4A^3}{27}}}{2}},$$

$$m=\sqrt[3]{\frac{B+\sqrt{B^2+\dfrac{4A^3}{27}}}{2}}$$

とする。

[注意]

3次方程式の解の公式は，係数が複素数の場合でも方程式⑦以下の式を適当に修正すれば得られる。ただし，高校の範囲で複素数の平方根は扱えない。

係数を実数に限定した3次方程式の解の公式は，恒等式

$$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=a^3+b^3+c^3-3abc \qquad \cdots\cdots ⑧$$

(高等学校数学科用　数学Ⅱ(数研出版)
P36 演習問題3(1))

を利用して作成した。

教科書で扱われている3次方程式は，次の**【問題1】**(1)のように因数定理を利用できる形に限られている。ところが，2020年からの新テストでは，例えば，花子さんと太郎さんの対話形式で**【問題1】**(2)のような3次方程式の解を求めることが考えられる。参考として**【作問例】**を作成した。3次方程式の解の公式の使い方も学習できるのではないかと考える。また，出題する場合は適宜空欄を作ればよい。

§2. 問題例

【問題1】

(1)　3次方程式 $x^3+4x^2-8=0$ を解け。

(高等学校数学科用　数学Ⅱ(数研出版)
P56　例題10)

(2)　3次方程式 $x^3+3x^2+9x+5=0$ を解け。

その際，対話の流れとなるのは，恒等式⑧を利用する今回紹介した解法と考えられる。例えば，2018年の摂南大・文系では以下のような問題が出題された。問題文中の波線部分は，恒等式⑧を利用している(**【問題2】**参照)。

【問題2】(『2018　数学Ⅰ・Ⅱ・A・B　入試問題集　理系』，数研出版　P11)

整数 a，b を係数とする x の3次方程式 $3x^3+ax+b=0$ は無理数

$$x=\left(\sqrt{\frac{11}{27}}+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\sqrt{\frac{11}{27}}-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$$ を解にもつとする。このとき，a，b を求めよう。

まず，

$$(x-p+q)\{x^2+(p-q)x+p^2+pq+q^2\}$$
$$=x^3+{}^{ア}\boxed{}\,pqx-p^3+q^3$$

である。更に，$p=\left(\sqrt{\frac{11}{27}}+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$，$q=\left(\sqrt{\frac{11}{27}}-\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}$ とおくと，$pq=\dfrac{{}^{イ}\boxed{}}{{}^{ウ}\boxed{}}$，$p^3-q^3=\dfrac{{}^{エ}\boxed{}}{{}^{オ}\boxed{}}$ であるから，$a={}^{カ}\boxed{}$，$b=-{}^{キ}\boxed{}$ が得られる。

【作問例】

> (1)　関数 $f(x)=x^3+3x^2+9x+5$ の変曲点の x 座標を求めよ。
>
> (2)　(1)で求めた変曲点の x 座標を a として，$x=y+a$ を関数 $f(x)$ に代入せよ。
>
> (3)　3次方程式 $x^3+3x^2+9x+5=0$ を解け。
>
> ヒント：恒等式
> $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
> $=a^3+b^3+c^3-3abc$ を利用してよい。

ある日，花子さんと太郎さんのクラスでは，数学の授業で上のような課題が出された。以下の会話は共同して解くために，放課後に交わされたものである。

花子：今日の授業で扱ったように，(1)は関数 $f(x)$ を2回微分すれば求められそうね。

太郎：えっと，

$$f'(x)=3x^2+6x+9,\ f''(x)=6x+6$$

だね。$f''(x)=0$ とおくと，$x=-1$ となって，この値の前後で，$f''(x)$ の符号が変化するから，答えは，$x=-1$ だね。

花子：(2)は $a=-1$ だから，$f(x)$ に $x=y-1$ を代入すればよいわね。

太郎：代入は

$f(y-1)=(y-1)^3+3(y-1)^2+9(y-1)+5$ だね。

花子：$(y-1)^3$ を展開すると，y^3-3y^2+3y-1 だね。

太郎：他の項も展開すると，

$$3(y-1)^2=3y^2-6y+3,\ 9(y-1)=9y-9$$

となるね。

花子：これらを $f(y-1)$ に代入して整理すると，(2)の答えは，

$$f(y-1)=y^3+6y-2$$

となるわね。

太郎：残るは(3)のみ。授業の最後に，

「3次方程式は2次の項を含まない $ax^3+bx+c=0$ の形のものが解ければ，一般の3次方程式の解が求められる」

と板書していたような……。

花子：この問題の場合は3次方程式 $y^3+6y-2=0$ の解が求まれば，3次方程式 $x^3+3x^2+9x+5=0$ の解は，$x=y-1$ で求まるというわけね。

太郎：3次方程式の解を求める方法は，まず因数定理を利用できるかを考えるんだったね。3次方程式 $y^3+6y-2=0$ は整数解はないことはすぐにわかるけど。

花子：ヒントの恒等式を使うのでしょうね。複数の文字を含んだ式は，着目する文字の次数に注目するのだったわね。

太郎：恒等式の右辺は，a，b，c のどの文字に着目しても3次式……。

花子：それなら，a を y に書き換えてみたらどうかしら。

太郎：$(y+b+c)(y^2+b^2+c^2-yb-bc-cy)$
$=y^3+b^3+c^3-3ybc$
となるね。左辺と右辺を交換して書いてみると

$$y^3+b^3+c^3-3ybc$$
$$=(y+b+c)(y^2+b^2+c^2-yb-bc-cy)$$

花子：なるほど，両辺とも y について降べきの順に整理すると，

$$y^3-3bcy+(b^3+c^3)$$
$$=(y+b+c)\{y^2-(b+c)y+(b^2-bc+c^2)\}$$

となるわね。すると，左辺の形の3次式は，右辺のように因数分解できるわけね。

太郎：左辺のような形をしていれば，3次方程式 $y^3-3bcy+(b^3+c^3)=0$ が解けるというわけだ。

花子：今回の3次方程式 $y^3+6y-2=0$ は，

$$-3bc=6 \text{ かつ } b^3+c^3=-2$$

と考えればよいのね。

太郎：あとは，$bc=-2$ と $b^3+c^3=-2$ から b，c の値を求めればよいわけだ。2つの式だから，どちらかの文字を消去して，残りの文字について解けば求まるはずだが，あまりやりたくないなあ。

花子：それなら，$bc=-2$ の両辺を3乗した等式 $b^3c^3=-8$ を作ると，b^3 と c^3 は2次方程式 $t^2+2t-8=0$ の2つの解と考えられるわよ。

太郎：これなら解ける。因数分解すると，
$(t+4)(t-2)=0$ から　$t=-4,\ 2$

花子：b，c は実数だから，$b=-\sqrt[3]{4}$，$c=\sqrt[3]{2}$ または $b=\sqrt[3]{2}$，$c=-\sqrt[3]{4}$ かな。もっとも b，c は対称だから，$b=-\sqrt[3]{4}$，$c=\sqrt[3]{2}$ だけでよいでしょうね。

太郎：ここで，$y^3-3bcy+(b^3+c^3)=0$ の解は，

$$y=-b-c \text{ または}$$
$$y^2-(b+c)y+(b^2-bc+c^2)=0$$

だね。さらに $y^2-(b+c)y+(b^2-bc+c^2)=0$ の解は，b，c は実数だから，

$$y=\frac{(b+c)\pm\sqrt{(b+c)^2-4(b^2-bc+c^2)}}{2}$$
$$=\frac{(b+c)\pm\sqrt{3}\,(b-c)i}{2}$$

となるね。

花子：b と c の値を代入すると，3次方程式 $y^3+6y-2=0$ の解は

$$y=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2},\ \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}\pm\sqrt{3}\,(-\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2})i}{2}$$

太郎：やっと3次方程式 $x^3+3x^2+9x+5=0$ の解が求まる。(3)の答えは，

$$x=-1+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2},$$
$$-1+\frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}\mp\sqrt{3}\,(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2})i}{2}$$

だね。1つの解が $x=-1+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$ では，因数定理は使えないわけだ。

《参考文献》

〔1〕『数学Ⅱ』，数研出版　P36，P56
〔2〕『2018　数学Ⅰ・Ⅱ・A・B　入試問題集　理系』，数研出版　P11

（茨城県　水戸葵陵高等学校）