点滅正四面体を題材にした確率の問題
～生徒に興味・関心を持たせる問題として～

西元　教善（にしもと　のりよし）

§1. はじめに

確率の問題には，硬貨，トランプ，サイコロ，色が塗られたり数字が書かれたりしたカードや球などが題材としてよく使われる。しかし，時々マンネリ化していると思うことがあり，また生徒の方もそのように思っているのではないかと思い，ちょっと目先を変えて生徒の興味・関心を引くものを題材にできないかと考えることがある。

そこで,「点滅正四面体」を題材にとってみたいと思う。点滅正四面体とは，4つの面がそれぞれ光ったり，光らなくなったり(消えたり)する正四面体で，投げたとき底面になった面はそれまで光っているときは光らなくなり，消えているときは光るという性質をもっている。最初，すべての面が消えている点滅正四面体を1回投げるとき，2回投げるとき，3回投げるとき，……，それぞれ光っている面の数は何面になるのか，またその確率はいくらであるか，さらには光っている面の数の期待値はいくらであるかなどを考えることで確率の問題になる。

本稿では，投げる回数が1回から5回までのとき，それぞれの回数だけ投げ終えたときに光っている面の数をそれぞれ X_k ($k=1$, 2, 3, 4, 5) として，X_k のとり得る値 i とそのときの確率 $P(k=i)$，さらには X_k の期待値 $E(X_k)$ について考察する。もちろん，前提としてどの面も同程度に底面になるとする。

§2. 問題とその分析

§1で説明したように,「点滅正四面体」とは，図1，図2のように光っていない(消えている)面が底面になると光り，光っている面が底面になると光らない(消える)という性質をもつ。

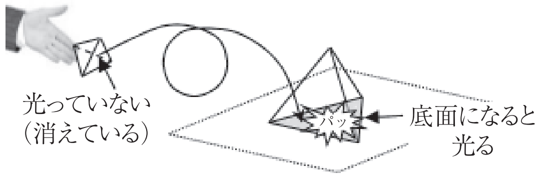

図 1

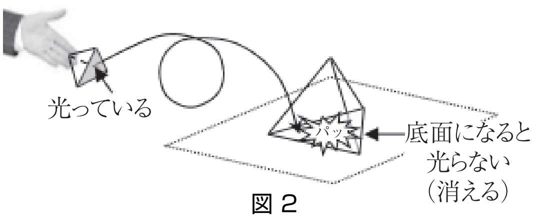

図 2

1回投げるとき

投げ終わったとき光っている面の数 X_1 は明らかに $X_1=1$ だけであり，よって，$P(X_1=1)=1$ である。したがって，$E(X_1)=1$ でもある。

2回投げるとき

1回目に底面になった面が2回目にも底面になればその面は光って消える。このとき $X_2=0$ である。1回目に底面になった面とは別の面が2回目に底面になれば光っている面は2つであるから，このとき $X_2=2$ である。これ以外の場合はないので，
$X_2=0$, 2 である。

次に，$P(X_2=0)$，$P(X_2=2)$ を求めよう。
2回投げるとき，(正四面体を投げるのだから)面の出方は全部で $4^2=16$ 通りある。

$X_2=0$ となるのは，4つの面を A, B, C, D とするとき，
(1回目に底面になる面，2回目に底面になる面)
$=(A,\ A)$, $(B,\ B)$, $(C,\ C)$, $(D,\ D)$
の4通りであるから，$P(X_2=0)=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$ である。

$X_2=2$ となる場合の数は，A, B, C, D から2つ取って並べる順列であるので,

${}_4P_2=4\cdot3=12$ 通りある。よって，

$P(X_2=2)=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$ である。

したがって，$E(X_2)=0\times\frac{1}{4}+2\times\frac{3}{4}=\frac{3}{2}$ である。

3 回投げるとき

3 回投げるとき，面の出方は全部で $4^3=64$ 通りある。

1 回目に底面になった面が 2 回目も 3 回目も底面になればその面は光って消えてまた光る。このとき $X_3=1$ である。また，1 回目に底面になった面が 2 回目も底面になれば光って消える。3 回目に他の面が底面になれば光ったままで，このときも $X_3=1$ である。これを含めてそれ以外にも異なる 2 面のうちの 1 面が 3 回中 2 回底面になり，他の 1 面が 3 回中 1 回底面になれば $X_3=1$ である。

1 回目に底面になった面以外が 2 回目に底面になり，3 回目には 1 回目，2 回目に底面になった面以外が底面になれば光った面は 3 つあるから，このとき $X_3=3$ である。

3 回投げるとき，$X_3=0,\ 2,\ 4$ となることはない。よって，$X_3=1,\ 3$ である。

$X_3=1$ となる場合

① 3 回中 3 回とも底面になる面の出方は ${}_4C_1=4$ 通り

② 3 回中 2 回だけ底面になる面と 3 回中 1 回だけ底面になる別の面の出方は，

ⅰ）4 つの面の中から底面になる 2 つの面の選び方が ${}_4C_2$ 通り，

ⅱ）その中で 3 回中 2 回だけ底面になる面と 3 回中 1 回底面になる別の面の選び方が 2 通り，

ⅲ）何回目にどれが底面になるかという順番を，同じものが 2 つ，同じものは 1 つだけであるときの並べ方，つまり「同じものを含む順列」として求めると $\frac{3!}{2!1!}$ 通りあることから，

$${}_4C_2\times2\times\frac{3!}{2!1!}=6\times2\times3=36 \text{ 通りある。}$$

よって，$P(X_3=1)=\frac{4+36}{64}=\frac{40}{64}=\frac{5}{8}$ である。

$X_3=3$ となる場合

4 つの面 A，B，C，D から 3 つ取り出して並べる順列と考えて，${}_4P_3=4\cdot3\cdot2=24$ 通りある。

よって，$P(X_3=3)=\frac{24}{64}=\frac{3}{8}$ である。

したがって，$E(X_3)=1\times\frac{5}{8}+3\times\frac{3}{8}=\frac{14}{8}=\frac{7}{4}$ である。

4 回投げるとき

4 回投げるとき，面の出方は全部で $4^4=256$ 通りある。

1 回目に底面になった面が 2 回目も 3 回目も 4 回目も底面になればその面は光って消えて光って消える。このとき $X_4=0$ である。また，1 回目に底面になった面が 2 回目も底面になれば光って消える。それとは別の面が 3 回目に底面になった面が 4 回目も底面になれば光って消えて，このときも $X_4=0$ である。これを含めてそれ以外にも異なる 2 面のうちの 1 面が 4 回中 2 回底面になり，他の 1 面が 4 回中 2 回底面になれば $X_4=0$ である。

1 回目に底面になった面が 2 回目も 3 回目も底面になり（光っている面は 1），4 回目には別の面が底面になれば光った面は 2 つあるから，このとき $X_4=2$ である。これを含めてそれ以外にも異なる 2 面のうちの 1 面が 4 回中 1 回底面になり，他の 1 面が 4 回中 3 回底面になれば $X_4=2$ である。

1 回目に底面になった面が 2 回目にも底面になり（光っている面は 0），3 回目には別の面が底面に（光っている面は 1），4 回目にもさらに別の面が底面になれば光った面は 2 つあるから，このとき $X_4=2$ である。これを含めてそれ以外にも 3 面のうちの 1 面が 4 回中 2 回底面になり，他の 2 面が 4 回中 1 回ずつ底面になれば $X_4=2$ である。

1 回目から 4 回目まですべて異なる面が底面になれば光っている面は 4 つあり，$X_4=4$ である。

4 回投げるとき，$X_4=1,\ 3$ となることはない。よって，$X_4=0,\ 2,\ 4$ である。

$X_4=0$ となる場合

① 4 回中 4 回とも底面になる面の出方は ${}_4C_1=4$ 通りある。

② 4 回中それぞれ 2 回だけ底面になる 2 つの面の出方が ${}_4C_2$ 通りあり，それぞれについてそれらが何回目に底面になるかを同じものが 2 つずつあるときの並べ方，つまり「同じものを含む順列」として求めると $\frac{4!}{2!2!}$ 通りあることから，

${}_4C_2\times\dfrac{4!}{2!2!}=6\times6=36$ 通りある。

よって，$X_4=0$ となる場合は $4+36=40$ 通りあるから，$P(X_4=0)=\dfrac{40}{256}=\dfrac{5}{32}$ である。

$X_4=2$ となる場合

① 4 回中 3 回だけ底面になる面と 4 回中 1 回だけ底面になる別の面の選び方は ${}_4C_2\times2$ 通りあり，それぞれについてそれらが何回目に底面になるかを同じものが 3 つずつ，同じものは 1 つだけであるときの並べ方，つまり「同じものを含む順列」として求めると $\dfrac{4!}{3!1!}$ 通りあることから，

${}_4C_2\times2\times\dfrac{4!}{3!1!}=6\times2\times4=48$ 通りある。

② 4 回中 2 回だけ底面になる面と 4 回中 1 回だけ底面になる異なる 2 つの面の選び方は ${}_4C_3\times3$ 通りあり，それぞれについてそれらが何回目に底面になるかを同じものが 2 つずつ，同じものは 1 つだけが 2 つあるときの並べ方，つまり「同じものを含む順列」として求めると

$\dfrac{4!}{2!1!1!}$ 通りあることから，

${}_4C_3\times3\times\dfrac{4!}{2!1!1!}=4\times3\times12=144$ 通りある。

よって，$X_4=2$ となる場合は $48+144=192$ 通りあるから，$P(X_4=2)=\dfrac{192}{256}=\dfrac{3}{4}$ である。

$X_4=4$ となる場合

4 つの面 A，B，C，D を並べる順列と考え $4!=24$ 通りある。

よって，$P(X_4=4)=\dfrac{24}{256}=\dfrac{3}{32}$ である。

したがって，

$E(X_4)=0\times\dfrac{5}{32}+2\times\dfrac{3}{4}+4\times\dfrac{3}{32}=\dfrac{12+3}{8}=\dfrac{15}{8}$

である。

5 回投げるとき

5 回投げるとき，面の出方は全部で $4^5=1024$ 通りある。また，$X_5=1$，3 である。

なお，一般に，$X_1=1$；$X_2=0$，2；$X_{2n+1}=1$，3；$X_{2n+2}=0$，2，4（n は自然数）である。

$X_5=1$ となる場合

① 5 回中 5 回とも同じ面が底面になる場合で，${}_4C_1=4$ 通りある。

② 5 回中 4 回だけ同じ面が底面になり，5 回中 1 回だけ別の面が底面になる場合で，

${}_4C_2\times2\times\dfrac{5!}{4!1!}=6\times2\times5=60$ 通りある。

③ 5 回中 3 回だけ同じ面が底面になり，5 回中 2 回だけ別の面が底面になる場合で，

${}_4C_2\times2\times\dfrac{5!}{3!2!}=6\times2\times10=120$ 通りある。

④ 5 回中 2 回ずつ異なる 2 つの面が底面になり，5 回中 1 回だけその 2 つの面とは別の面が底面になる場合で，

${}_4C_3\times3\times\dfrac{5!}{2!2!1!}=4\times3\times30=360$ 通りある。

よって，$4+60+120+360=544$ 通りあるから，

$P(X_5=1)=\dfrac{544}{1024}=\dfrac{17}{32}$ である。

$X_5=3$ となる場合

① 5 回中 3 回だけ底面になる面とそれとは異なる別の 2 つの面が底面になる場合で，

${}_4C_3\times3\times\dfrac{5!}{3!1!1!}=4\times3\times20=240$ 通りある。

② 5 回中 2 回だけ底面になる面とそれとは異なる別の 3 つの面が底面になる場合で，

${}_4C_4\times4\times\dfrac{5!}{2!1!1!1!}=1\times4\times60=240$ 通りある。

よって，$240+240=480$ 通りあるから，

$P(X_5=3)=\dfrac{480}{1024}=\dfrac{15}{32}$ である。

したがって，$E(X_5)=1\times\dfrac{17}{32}+3\times\dfrac{15}{32}=\dfrac{62}{32}=\dfrac{31}{16}$ である。

§3. まとめ

この点滅正四面体を k 回投げるとき，光っている面の数の期待値 $E(X_n)$ は

$E(X_3)=\dfrac{7}{4}$，$E(X_4)=\dfrac{15}{8}$，$E(X_5)=\dfrac{31}{16}$ であり，

$E(X_1)<E(X_2)<E(X_3)<E(X_4)<E(X_5)$ であることが確認されたが，一般に $E(X_n)$ は n の式としてどのように表すことができるのか，また，$\lim_{n\to\infty}E(X_n)$ は存在するのか，存在するならばその値はいくらなのかまだまだ興味は尽きない。

生徒には，$E(X_3)$，$E(X_4)$，$E(X_5)$ を考えさせるとよいだろう。

（山口県立高森高等学校）