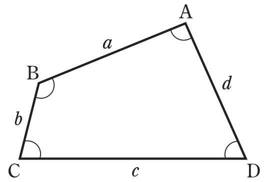
多角形の正弦定理，余弦定理および面積公式

おおたに　まさのり
大谷　昌範

§1. はじめに

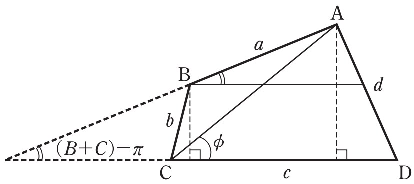
四角形に対して，余弦定理をうまく使えば，四角形の余弦定理が証明できる。



図のような四角形ABCDに対して，辺の長さを図のようにa，b，c，dとする。内角の大きさについては，混乱がない限り，例えば頂点Aの内角の大きさをそのままAで表す。次の定理が成り立つ。

$$d^2=a^2+b^2+c^2-2ab\cos B-2bc\cos C +2ca\cos(B+C)$$

（証明） 図の四角形ABCDをもとに証明する。他の場合にも同様に示される。対角線ACを引き，点Bを通り，CDと平行な補助線も引く。



$\angle\mathrm{ACD}=\phi$ とする。△ABCと△ACDにそれぞれ余弦定理を使い

$$\mathrm{AC}^2=a^2+b^2-2ab\cos B,$$
$$d^2=\mathrm{AC}^2+c^2-2c\mathrm{AC}\cos\phi$$
$$=a^2+b^2-2ab\cos B+c^2-2c\mathrm{AC}\cos\phi$$

ここで，

$$\mathrm{AC}\cos\phi=b\cos C+a\cos\{(B+C)-\pi\}$$
$$=b\cos C-a\cos(B+C)$$

に注意して

$$d^2=a^2+b^2+c^2-2ab\cos B-2bc\cos C +2ca\cos(B+C)$$

となる。　　　　（終）

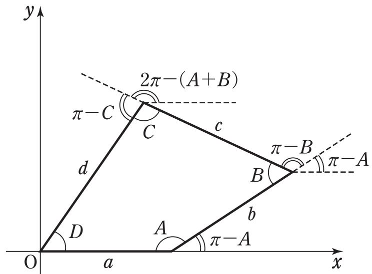
誘導を与えれば，生徒たちの課外研究にも出来るかも知れない。さて，更に五角形へと拡張を考えたのであるが，少々筆者の手に余り，いろいろ調べたところ文献〔1〕において，既に多角形の正弦定理と余弦定理が扱われていた。

本稿では〔1〕での研究について，内容を整理して紹介したい。また，少し工夫すれば面積公式も証明出来るので，このことにも触れておきたい。簡単のため，本稿では凸多角形について取り扱う。

§2. 四角形の正弦定理と余弦定理

〔1〕では，五角形と六角形を対象に考察を試みている。ここでは〔1〕で採られた証明方法を，改めて四角形の場合におき換えて，紹介しておきたい。

図のようにxy平面上に1つの頂点が原点に，1辺がx軸上にくるように配置し，図のように4つの内角の大きさをA，B，C，Dとし，辺の長さをa，b，c，dとする。



各辺のx軸への射影を考えると，閉じた図形であるから，それぞれの射影の和は0になるので，

$$a+b\cos(\pi-A)+c\cos\{2\pi-(A+B)\} +d\cos\{3\pi-(A+B+C)\}=0$$
$$a-b\cos A+c\cos(A+B)-d\cos D=0 \quad \cdots\cdots①$$

各辺のy軸への射影についても同様に，その和は0であるから

$$b\sin(\pi-A)+c\sin\{2\pi-(A+B)\} +d\sin\{3\pi-(A+B+C)\}=0$$

$$b\sin A - c\sin(A+B) - d\sin D = 0 \quad \cdots\cdots②$$

ここで，②は１辺と１つの角を除いたすべての辺と角の関係式なので，四角形に対する「**正弦定理**」と考えることができる。

ここで①，②をそれぞれ

$$d\cos D = a - b\cos A + c\cos(A+B),$$
$$d\sin D = b\sin A - c\sin(A+B)$$

と変形し，それぞれ両辺を２乗して，辺々足し合わせて，まとめると

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos A - 2bc\cos B + 2ca\cos(A+B)$$

という四角形に対する「**余弦定理**」が導かれる。2つの角を除いたすべての辺と角の関係式になっている。

なお①，②を

$$a + c\cos(A+B) = b\cos A + d\cos D \quad \cdots\cdots①'$$
$$c\sin(A+B) = b\sin A - d\sin D \quad \cdots\cdots②'$$

と変形し，同様に計算すると

$$a^2 + c^2 + 2ca\cos(A+B) = b^2 + d^2 + 2bd\cos(A+D)$$

という余弦定理が得られる。さらに，①，②を

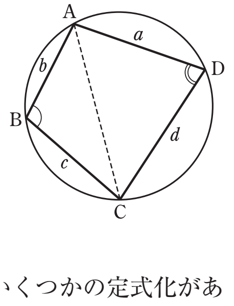
$$c\cos(A+B) - b\cos A = d\cos D - a \quad \cdots\cdots①''$$
$$c\sin(A+B) - b\sin A = -d\sin D \quad \cdots\cdots②''$$

と変形して計算すると

$$b^2 + c^2 - 2bc\cos B = a^2 + d^2 - 2ad\cos D$$

という余弦定理が得られる。この式は，三角形の余弦定理の応用と考えてもよいかもしれない。

実際，三角比の問題で，円に内接する４辺の長さが既知の四角形の面積を求める際，図のように対角線 AC について方程式を立てて求めていく。そのときの方程式がこの余弦定理の式である。

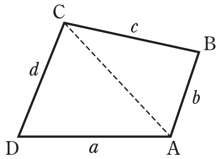


三角形と違い，余弦定理にはいくつかの定式化があることには注意しておきたい。他の多角形についても，同様の方法で正弦定理と余弦定理が得られることは理解できるだろう。

§3. 四角形の面積公式

次に四角形の正弦定理を用いると，凸四角形の（a，b，c，A，B を既知とした）面積公式が導き出される。

角と辺の長さは図のようにして，求める面積を S とすると



$$S = \triangle\mathrm{ABC} + \triangle\mathrm{ADC}$$
$$= \frac{1}{2}bc\sin B + \frac{1}{2}ad\sin D$$

ここで §2 の正弦定理により

$d\sin D = b\sin A - c\sin(A+B)$ であるから

$$S = \frac{1}{2}bc\sin B + \frac{1}{2}a\{b\sin A - c\sin(A+B)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{ab\sin A + bc\sin B - ac\sin(A+B)\}$$

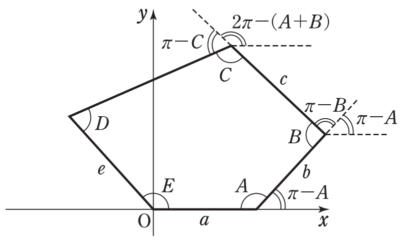
面積公式

$$S = \frac{1}{2}\{ab\sin A + bc\sin B - ac\sin(A+B)\}$$

§4. 五角形の正弦定理と余弦定理

次に五角形の場合についてまとめておきたい。これは〔１〕からの引用になる。

§2 と同様に考えていく。図のように５つの内角の大きさを A，B，C，D，E とし，辺の長さを a，b，c，d，e とする。



各辺の x 軸への射影について

$$a + b\cos(\pi - A) + c\cos\{2\pi - (A+B)\} + d\cos\{3\pi - (A+B+C)\} + e\cos\{4\pi - (A+B+C+D)\} = 0$$

$$a - b\cos A + c\cos(A+B) + d\cos(D+E) - e\cos E = 0 \quad \cdots\cdots①$$

各辺の y 軸への射影についても同様に，

$$b\sin(\pi - A) + c\sin\{2\pi - (A+B)\} + d\sin\{3\pi - (A+B+C)\} + e\sin\{4\pi - (A+B+C+D)\} = 0$$ より

正弦定理

$$b\sin A-c\sin(A+B)+d\sin(D+E)$$
$$-e\sin E=0 \quad \cdots\cdots ②$$

を得る。ここで①，②を

$$a-b\cos A+c\cos(A+B)$$
$$=e\cos E-d\cos(D+E),$$
$$b\sin A-c\sin(A+B)=e\sin E-d\sin(D+E)$$

と変形し，それぞれ両辺を2乗して，辺々を足し合わせて，まとめると

余弦定理

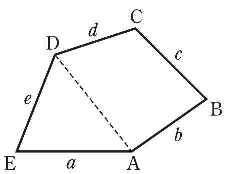
$$a^2+b^2+c^2-2ab\cos A-2bc\cos B$$
$$+2ac\cos(A+B)=d^2+e^2-2de\cos D$$

が導かれる。①を $a=\cdots$ と変形し，②を用いて同様に計算すれば，次の余弦定理が得られるが，〔1〕では扱われていない。

$$a^2=b^2+c^2+d^2+e^2-2bc\cos B-2cd\cos C$$
$$-2de\cos D+2bd\cos(B+C)$$
$$+2ce\cos(C+D)-2be\cos(B+C+D)$$

§5. 五角形の面積公式

更に五角形の面積をSとすると，四角形の面積公式から



$$S=\triangle\mathrm{ADE}$$
$$+(\text{四角形 ABCD})$$
$$=\frac{1}{2}ae\sin E$$
$$+\frac{1}{2}\{bc\sin B+cd\sin C-bd\sin(B+C)\}$$

ここで正弦定理を使うと(§4の②を角について若干変更して)，

$$e\sin E=b\sin A-c\sin(A+B)$$
$$+d\sin(A+B+C) \text{ より}$$

$$S=\frac{1}{2}a\{b\sin A-c\sin(A+B)$$
$$+d\sin(A+B+C)\}$$
$$+\frac{1}{2}\{bc\sin B+cd\sin C-bd\sin(B+C)\}$$

をまとめると，次の公式を得る。

面積公式（a，b，c，d，A，B，Cを既知とした）

$$S=\frac{1}{2}\{ab\sin A+bc\sin B+cd\sin C$$
$$-ac\sin(A+B)-bd\sin(B+C)$$
$$+ad\sin(A+B+C)\}$$

§6. 入試問題より

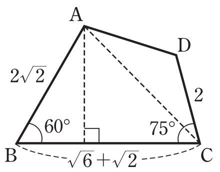
最後に，本稿で扱った公式について，少しコメントを加えておきたい。

① 四角形の面積公式について，例えば次のような問題(〔2〕，問141)を解いて，その有効性を確認しておこう。

> 四角形ABCDにおいて，AB$=2\sqrt{2}$，BC$=\sqrt{6}+\sqrt{2}$，CD$=2$，$\angle$B$=60^\circ$，$\angle$C$=75^\circ$ のとき，この四角形の面積を求めよ。
>
> 〔15 鳥取大〕

対角線ACを引き，点AからBCに垂線を下ろせば，AC$=2\sqrt{3}$，$\angle$ACD$=30^\circ$ がわかるので，2つの三角形の面積の和を考えればよいが，公式を用いれば次のようになる。

(解) 加法定理により



$$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)$$
$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

に注意すると，公式から

$$2S=2\sqrt{2}(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin 60^\circ$$
$$+2(\sqrt{6}+\sqrt{2})\sin 75^\circ-4\sqrt{2}\sin 135^\circ$$
$$=2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}+1)^2-4$$
$$=6+4\sqrt{3}$$

よって　$S=3+2\sqrt{3}$

② 1辺の長さが1の正五角形に対して，五角形の余弦定理を適用すると

$$1=4-6\cos\frac{3}{5}\pi+4\cos\frac{6}{5}\pi-2\cos\frac{9}{5}\pi$$

$6\cos\frac{2}{5}\pi-4\cos\frac{\pi}{5}-2\cos\frac{\pi}{5}+3=0$ より

$2\cos\frac{2}{5}\pi-2\cos\frac{\pi}{5}+1=0$ という等式を得る。この等式に2倍角の公式を使うことで，$\cos\frac{\pi}{5}$ の値を求めることができる。この事実を使った問題が津田塾大において出題された(〔3〕，問162)。

$2\cos\frac{2}{5}\pi-2\cos\frac{\pi}{5}+1=0$ が成り立つことを利用して $\cos\frac{\pi}{5}$ の値を求めよ。　〔14 津田塾大〕

③　更に１辺の長さが１の正五角形の面積 S を求めてみると，公式より

$$2S=3\sin\frac{3}{5}\pi-2\sin\frac{6}{5}\pi+\sin\frac{9}{5}\pi$$
$$=3\sin\frac{2}{5}\pi+2\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}$$

であるから

$$S=\frac{1}{2}\left(3\sin\frac{2}{5}\pi+\sin\frac{\pi}{5}\right)$$ である。

《参考文献》

〔１〕 R.B.Kershner, The law of sines and law of cosines for polygons, Mathematics Magazine 44 (1971), pp.150－153.

〔２〕 2015 年版　数学Ⅰ・Ⅱ・A・B　入試問題集(理系), 数研出版

〔３〕 2014 年版　数学Ⅰ・Ⅱ・A・B　入試問題集(文理系), 数研出版

(神奈川県　湘南工科大学附属高等学校)