3 次元版ピックの公式について

才野瀬（さいのせ）　一郎（いちろう）

§1. はじめに

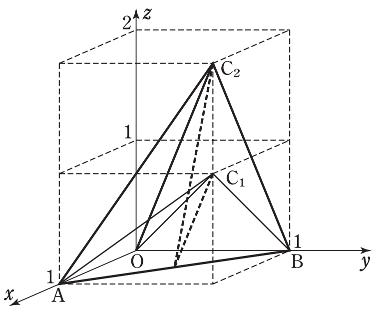
xy 平面上の格子多角形 M については，M の内部に属する格子点数 i と周に属する格子点数 j を用いて，M の面積 S を表す次のピックの公式が成り立つ。

$$S=i+\frac{j}{2}-1 \qquad \text{(参考文献〔1〕,〔3〕)}$$

では，点Oを原点とする xyz 空間 $\mathbb{R}^3$ 内の凸格子多面体 M（格子点を頂点とする凸多面体で，穴はないとする）について，M の内部に属する格子点数と境界面に属する格子点数を用いて，M の体積を表す公式を作ることができるだろうか。

次の例をみると単純ではないことに気づく。

[例]　O，A(1，0，0)，B(0，1，0)，$\mathrm{C}_n(1,\ 1,\ n)$（n は自然数）とするとき，四面体 OABC_n の内部の格子点は 0 個，境界面上の格子点は頂点のみの 4 個で，格子点の情報は同じにも関わらず，体積は $\frac{1}{6}n$ で相異なる。



実は，3 次元版ピックの公式は次の主題の形で表せることが知られている。

ここで一般に，空間内の図形 M（多面体，多角形，線分，点）を原点中心に 2 倍に相似拡大した図形を M' と表し，M の<u>2 倍膨らまし</u>と呼ぶ。すなわち，

$$M'=\{\mathrm{P}\mid\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OQ}},\ \mathrm{Q}\in M\}$$

原点Oについては，$\mathrm{O}'=\mathrm{O}$ である。

また，M に属する格子点数を $|M|$ で表す。

[主題]　3 次元版ピックの公式（以下，公式という）

体積が v の格子凸多面体 M について，内部の格子点数を a，境界面の格子点数を b とし，M の 2 倍膨らまし M' について，内部の格子点数を a'，境界面の格子点数を b' とする。

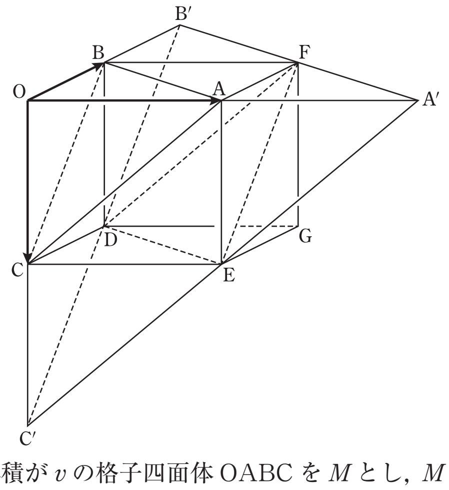
このとき，次の公式が成り立つ。

$$v=\frac{a'-2a}{6}+\frac{b'-2b}{12} \qquad \text{(参考文献〔2〕)}$$

§2. 四面体の場合

この節では，補題 1（鍵）と補題 2 を利用して，特に M が格子四面体の場合である命題 1 を扱う。

[命題 1]　本質的な場合



体積が v の格子四面体 OABC を M とし，M の 2 倍膨らましである M' を四面体 $\mathrm{OA'B'C'}$ とおくと，公式と同値な等式

$$6v+2a+b+\frac{1}{2}b'$$
$$=a'+b' \quad (=|\text{四面体 }\mathrm{OA'B'C'}|)$$

が成り立つ。

なお，図において点 D，E，F を順に辺 $\mathrm{B'C'}$，$\mathrm{C'A'}$，$\mathrm{A'B'}$ の中点とすると，体積が $6v$ の平行六面体 OAFB-CEGD が構成される。

[補題 1]

命題 1 において

$K=\{P\in\mathbb{R}^3|$

$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC},\ 0\leqq s,\ t,\ u<1\}$

とおくと，$|K|=6v$ である。

(証明)　参考文献〔1〕§2 と同一の方法。

$p,\ q,\ r$ を整数として，K を $p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}$ 方向に平行移動したものを

$K(p,\ q,\ r)$

$=\{P|Q\in K,\ \overrightarrow{OP}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OQ}\}$

$=\{P|\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC},$

$p\leqq s<p+1,\ q\leqq t<q+1,\ r\leqq u<r+1\}$

とおくと，その格子点数は $|K|$，体積は $6v$ に等しい。もちろん，$K=K(0,\ 0,\ 0)$ と合同である。

さらに，異なる 2 つの $K(p,\ q,\ r)$ は互いに共通部分をもたず，$K(p,\ q,\ r)$ 全体は空間全体を覆い尽くしている。

ここで，自然数 n に対して格子立方体を

$E(n)=\{(x,\ y,\ z)|-n\leqq x,\ y,\ z\leqq n\}$

と定める。ある十分大きなNを選ぶと，
平行六面体 OAFB-CEGD は $E(N)$ に含まれるから，以下そのようなNを 1 つ固定する。

さて，自然数 n に対して
$K(p,\ q,\ r)\cap E(2nN)\neq\emptyset$ となる $K(p,\ q,\ r)$ の個数を e_n とし，そのような $K(p,\ q,\ r)$ すべての和集合を K_n とおくと，

$E(2nN)\subset K_n\subset E(2(n+1)N)$

を満たすから，格子点数と体積について

$(4nN+1)^3\leqq|K|e_n\leqq\{4(n+1)N+1\}^3,$

$(4nN)^3\leqq 6ve_n\leqq\{4(n+1)N\}^3$

これらの比をとると

$$\frac{(4nN+1)^3}{\{4(n+1)N\}^3}\leqq\frac{|K|e_n}{6ve_n}\leqq\frac{\{4(n+1)N+1\}^3}{(4nN)^3}$$

分母分子を $(4nN)^3$ で割って

$$\frac{\left(1+\frac{1}{4nN}\right)^3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}\leqq\frac{|K|}{6v}\leqq\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{4nN}\right)^3$$

すると，$n\longrightarrow\infty$ のとき 左辺 $\longrightarrow 1$，右辺 $\longrightarrow 1$ となるから

$$\frac{|K|}{6v}=1 \text{ すなわち } |K|=6v$$

[補題 2]

命題 1 において $b'=4b-6$ が成り立つ。

(証明)　命題 1 の図において，四面体 OABC の境界面にある格子点から 4 点 O，A，B，C を除いた格子点の集合を L，四面体 OA′B′C′ の境界面にある格子点から 10 点 O，A，B，C，A′，B′，C′，D，E，F を除いた格子点の集合を L' とおく。すると

$b'=4b-6$

$\Longleftrightarrow |L'|+10=4(|L|+4)-6$

$\Longleftrightarrow |L'|=4|L|$　　……①

より，①を示せば十分である。

以下では，△PQR の内部を(PQR)，線分 PQ の両端を除く部分を開線分(PQ)と表す。

L は，4 個の三角形の内部(OAB)，(OBC)，(OCA)，(ABC)と 6 本の開線分(OA)，(OB)，(OC)，(AB)，(BC)，(CA)に属する格子点からなり，互いに共通部分をもたない。

さて，△AA′F と △BB′F は △OAB を平行移動したものであり，△ABF は格子線分 AB の中点に関して △OAB と点対称だから，格子点数について

|(OAB)|=|(AA′F)|=|(BB′F)|=|(ABF)|

線分 CE 等は線分 OA を平行移動したものだから

|(OA)|=|(AA′)|=|(FB)|=|(CE)|

このようにして，下線部の 4 個の三角形の内部と 6 本の開線分に対して，同じ格子点数をもつ三角形の内部と開線分が四面体 OA′B′C′ の境界面にそれぞれ 4 組ずつあることが確かめられる。さらに，L' はこれら 16 個の三角形の内部と 24 本の開線分に属する格子点から成り，これらは互いに共通部分をもたないから，①が成り立つ。

[命題 1 の証明]

以下では，多面体はその内部と境界面を合わせた部分を表し，多角形はその内部と周を合わせた部分を表すものとする。

補題 1 で定義した領域Kから四面体 DEFG の内部を取り除いた領域を W とおく。

定義から，W の境界になっている △AEF，△BDF，△CDE はいずれも W の外部にある。
(例えば，△AEF に属する点 P は
$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC},\ s=1$ を満たす。)

他方，△DEF の内部は W に含まれる。

四面体 DEFG の内部は，格子線分 OG の中点に関して四面体 OABC の内部と点対称だから，

|四面体DEFGの内部|$=a$ である。補題1によれば

$$|W|=|K|-a=6v-a \quad \cdots\cdots①$$

さらに,

$T_1=$四面体AA′FE

$T_2=$四面体BB′FD

$T_3=$四面体CC′ED

とおくと，次の関係式群②が成り立つ。

四面体OA′B′C′$=W\cup T_1\cup T_2\cup T_3$

$W\cap T_1=W\cap T_2=W\cap T_3=\varnothing$

$T_1\cap T_2=\{\mathrm{F}\}$, $T_1\cap T_3=\{\mathrm{E}\}$,

$T_2\cap T_3=\{\mathrm{D}\}$ ……②

ここで，T_1，T_2，T_3 は四面体OABCを平行移動したものだから，各々に含まれる格子点数は|四面体OABC|$=a+b$ に等しい。すると②より

|四面体O′A′B′C′|$=|W|+3(a+b)-3$

最後に①と補題2により

$$a'+b'=(6v-a)+3a+b+(2b-3)$$
$$=6v+2a+b+\frac{1}{2}b'$$

(証明終)

§3. 一般の場合

一般の場合については，凸格子多面体がいくつかの格子四面体に分割できることを認めれば，次の命題2を示すことで十分。

[命題2]

格子凸多面体 M_k $(k=1,\ 2,\ 3)$ について，同様に v_k，a_k，b_k，a_k'，b_k' を定める。

ここで，M_3 が△OABを接続境界として M_1 と M_2 に分割できるとすると,

$M_3=M_1\cup M_2$，$M_1\cap M_2=$△OAB　かつ

△OABの内部は M_1 と M_2 の内部にある。

このとき，$k=1,\ 2$ のときに公式

$$a_k'+\frac{1}{2}b_k'=6v_k+2a_k+b_k$$

が成り立てば，$k=3$ のときも公式が成り立つ。

(証明)　まず，△OABの内部の格子点数を i，周の格子点数を j とし，△OA′B′の内部の格子点数を i'，周の格子点数を j' とすると，$j'=2j$ が成り立つ。

実際，補題2と同様に，△OABの平行移動と点対称移動に注目して

$$j'=|(\mathrm{OA})|+|(\mathrm{AA'})|+|(\mathrm{OB})|$$
$$+|(\mathrm{BB'})|+|(\mathrm{A'F})|+|(\mathrm{FB'})|$$
$$+|\mathrm{O}|+|\mathrm{A}|+|\mathrm{A'}|+|\mathrm{F}|+|\mathrm{B'}|+|\mathrm{B}|$$
$$=2|(\mathrm{OA})|+2|(\mathrm{OB})|+2|(\mathrm{AB})|$$
$$+2\{|\mathrm{O}|+|\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|\}$$
$$=2j$$

(点Pが格子点のとき，$|\mathrm{P}|=1$ に注意)

次に，M_1 と M_2 の内部の点および△OABの内部の点は M_3 の内部の点になるから

$$a_3=a_1+a_2+i$$

M_3 の境界は，M_1 と M_2 の境界からそれぞれ△OABの内部と周を除いたものに，新たに△OABの周を付け加えたものだから

$$b_3=b_1+b_2-2i-j$$

同様に，M_1'，M_2'，M_3' について

$$a_3'=a_1'+a_2'+i',\quad b_3'=b_1'+b_2'-2i'-j'$$

体積については　$v_3=v_1+v_2$

以上を用いて計算をすると，命題1により

$$a_3'+\frac{1}{2}b_3'$$
$$=(a_1'+a_2'+i')+\frac{1}{2}(b_1'+b_2'-2i'-j')$$
$$=\left(a_1'+\frac{1}{2}b_1'\right)+\left(a_2'+\frac{1}{2}b_2'\right)-\frac{1}{2}j'$$
$$=(6v_1+2a_1+b_1)+(6v_2+2a_2+b_2)-j$$
$$=6(v_1+v_2)+2(a_1+a_2+i)+(b_1+b_2-2i-j)$$
$$=6v_3+2a_3+b_3$$

(証明終)

《参考文献》

〔1〕 拙著　格子平行四辺形とピックの公式　数研通信 数学 No.90

〔2〕 日比孝之著　凸多面体の不易流行　日本数学会市民講演会の講演記録 http://mathsoc.jp/publication/tushin/2102/2102hibi.pdf

〔3〕 日比孝之著　証明の探究　増補版　大阪大学出版会　P135 ～ P165

(広島県　広島市立基町高等学校)