指数について

清水(しみず)　団(だん)

§1. はじめに

数学Ⅱで指数関数を学習するが，そこで指数法則が拡張され，自然数の集合で考えられていた指数が整数→有理数→実数へと拡張されていく。

底は正の数で固定されたまま拡張されない。

累乗根を導入するときに，指数に制限をつけて，一部，負の底に対する数を考えようとする。この制限はあくまで結果が実数になるものに限定するからである。

そこで，今回，a^x で表される数が a も x も様々な数の範囲に拡張されたときにどうなるかをまとめた。

指数関数の定義はいろいろあるが，今回は一般の複素数 $\alpha \neq 0$ を底とし，複素変数 z を指数とする指数関数は，複素変数の対数関数 $\log z$ に対して，

$$\alpha^z = \exp(z\log\alpha) = \exp\{z(\ln|\alpha| + i\arg\alpha)\}$$

と表されることを用いることにする。

（wikipedia　指数関数より）

§2. 表によるまとめ

a^x について，数の範囲を表にまとめた。？のところは確かめていくことにする。

$a \backslash x$	$\mathbb{N}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$\mathbb{N}$	$2^3=8$	$2^0=1$	$2^{-1}=\frac{1}{2}$	$2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$	$2^{\sqrt{2}}$	$2^i=?$
0	$0^3=0$	$0^0=?$	$0^{-1}=?$	$0^{\frac{1}{2}}=0$	$0^{\sqrt{2}}=0$	$0^i=?$
$\mathbb{Z}$	$(-2)^3=-8$	$(-2)^0=1$	$(-2)^{-1}=-\frac{1}{2}$	$(-2)^{\frac{1}{2}}=?$	$(-2)^{\sqrt{2}}=?$	$(-2)^i=?$
$\mathbb{Q}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^0=1$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}=\frac{3}{2}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{\sqrt{2}}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^i=?$
$\mathbb{R}$	$(\sqrt{2})^3=2\sqrt{2}$	$(\sqrt{2})^0=1$	$(\sqrt{2})^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}$	$(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}}=\sqrt[4]{2}$	$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$	$(\sqrt{2})^i=?$
$\mathbb{C}$	$i^3=-i$	$i^0=1$	$i^{-1}=\frac{1}{i}=-i$	$i^{\frac{1}{2}}=?$	$i^{\sqrt{2}}=?$	$i^i=?$

§3. ？の検討

(1)　a^x，$a<0$，$x\in\mathbb{Q}$ のとき

累乗根との関係で，高校数学で許されていると思われる表現を書いてみる。

$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{-2}=\sqrt{2}\,i$

$\sqrt[3]{2}=2^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[3]{-2}=-\sqrt[3]{2}=-2^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[5]{2^3}=2^{\frac{3}{5}}$

$\sqrt[5]{(-2)^3}=\sqrt[5]{-8}=-\sqrt[5]{8}=-2^{\frac{3}{5}}$

逆に累乗根で許されていないのは

$\sqrt[4]{-2}$

である。一般的には m と n が互いに素で，n が 4 以上の偶数のときは，

$\sqrt[n]{(\text{負の数})^m}$　……☆

は許されていない。理由は☆が多価であることによる。$n=2$ のときは特別に

$\sqrt{-2}=\sqrt{2}\,i$

などとマッチングすることにより認めている。

$\sqrt[4]{-2}$ を考えてみる。

4乗して -2 になる数なので，

$$\frac{\pm1\pm i}{\sqrt[4]{2}}\quad（複号任意）$$

と4つあるが，どれが $\sqrt[4]{-2}$ か定めることができない。多価であることを認め，

$$\sqrt[4]{-2}=(-2)^{\frac{1}{4}}=\begin{cases}\dfrac{1+i}{\sqrt[4]{2}}\\[2mm] \dfrac{-1+i}{\sqrt[4]{2}}\\[2mm] \dfrac{1-i}{\sqrt[4]{2}}\\[2mm] \dfrac{-1-i}{\sqrt[4]{2}}\end{cases}$$

とする。

この『多価』は非常に抵抗があるようだ。1つの値が4つというのは受け入れがたい人が多い。

(2) a^x，$a<0$，$x\in\mathbb{R}$ のとき

$(-2)^{\sqrt{2}}$ はどう考えればよいのであろうか？

$$a^z=\exp(z\log a)=\exp\{z(\ln|a|+i\arg a)\}$$

を用いて考えてみる。$n\in\mathbb{Z}$ として，

$$\begin{aligned}(-2)^{\sqrt{2}}&=\exp\{\sqrt{2}\log(-2)\}\\&=\exp[\sqrt{2}\{\ln|-2|+i\arg(-2)\}]\\&=\exp[\sqrt{2}\{\ln 2+i(\pi+2n\pi)\}]\\&=\exp(\sqrt{2}\ln 2)\cdot\exp\{\sqrt{2}(2n+1)\pi i\}\\&=2^{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}(2n+1)\pi i}\end{aligned}$$

ということで，複素数平面上で考えれば，0を中心とする半径 $2^{\sqrt{2}}$ の円周上に無数(可算無限個)に散らばっている。

(3) a^x，$a\in\mathbb{C}$，$x\in\mathbb{R}$ のとき

(3)のように考えると解決する。

$i^{\frac{1}{2}}$ を例にとる。

$$\begin{aligned}i^{\frac{1}{2}}&=\exp\left(\frac{1}{2}\log i\right)\\&=\exp\left\{\frac{1}{2}(\ln|i|+i\arg i)\right\}\\&=\exp\left[\frac{1}{2}\left\{\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right\}\right]\\&=\exp\left[\frac{1}{2}\left\{0+\frac{(4n+1)\pi i}{2}\right\}\right]\\&=\exp\left\{\frac{(4n+1)\pi i}{4}\right\}\\&=e^{\frac{(4n+1)\pi i}{4}}\end{aligned}$$

θ は周期2なので，$n=0$，1 としてよい。

$$i^{\frac{1}{2}}=\begin{cases}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\\[2mm] \dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}\end{cases}$$

(4) a^x，$x\in\mathbb{C}$ のとき

最後に残るは指数が虚数のときである。

(3)と同様に 2^i，$(-2)^i$，i^i を考える。

$$\begin{aligned}2^i&=\exp(i\log 2)\\&=\exp\{i(\ln|2|+i\arg 2)\}\\&=\exp[i\{\ln 2+i(2n\pi)\}]\\&=\exp(i\ln 2+i^2\cdot 2n\pi)\\&=\exp(i\ln 2-2n\pi)\\&=\exp(i\ln 2)\exp(-2n\pi)\\&=e^{-2n\pi}\{\cos(\ln 2)+i\sin(\ln 2)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-2)^i&=\exp\{i\log(-2)\}\\&=\exp[i\{\ln|-2|+i\arg(-2)\}]\\&=\exp[i\{\ln 2+i(\pi+2n\pi)\}]\\&=\exp\{i\ln 2+i^2(2n+1)\pi\}\\&=\exp\{i\ln 2-(2n+1)\pi\}\\&=\exp(i\ln 2)\exp\{-(2n+1)\pi\}\\&=e^{-(2n+1)\pi}\{\cos(\ln 2)+i\sin(\ln 2)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i^i&=\exp(i\log i)\\&=\exp\{i(\ln|i|+i\arg i)\}\\&=\exp\left[i\left\{0+i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right\}\right]\\&=\exp\left\{i^2\cdot\frac{(4n+1)\pi}{2}\right\}\\&=\exp\left\{-\frac{(4n+1)\pi}{2}\right\}\\&=e^{-\frac{(4n+1)\pi}{2}}\end{aligned}$$

どれも可算無限個の値をとる。

(5) 0^x について

まず，$x\in\mathbb{R}$ のときは $x>0$，$x=0$，$x<0$ の場合に分けて考える。

(i) $x>0$ の例は

$$0^{\frac{1}{2}}=0,\quad 0^{\sqrt{2}}=0$$

(ii) $x<0$ は $t=\dfrac{1}{s}$ のグラフの $s\fallingdotseq 0$ の様子で考えると，

$$0^{-1}=\frac{1}{0}=\pm\infty$$

となり，定まらないようである。

$0^{-\frac{1}{2}}$ はどうか？ $t=\dfrac{1}{\sqrt{s}}$ のグラフの $s\fallingdotseq 0$ の

様子で考えて見ると，定義域は $s>0$ なので，

$$0^{-\frac{1}{2}}=\infty$$

ということになる。しかし，$s<0$ のときの

$s^{-\frac{1}{2}}$ の考察を待つ必要がある。一旦保留するが，有限確定とはならないことは明らかである。

$0^{-\sqrt{2}}$ も同様である。

(iii) $x=0$ は極限で考えると，

$$0^0=1$$

とすることが多いが，これは底と指数が同じスピードで正の方向から 0 に近づくときだけである。一般的には不定形となりそうである。

(iv) $x\in\mathbb{C}$ のときはどうか？

0^i は $\arg 0$ を考えていないので，あまり積極的に求めていないようである。

例えば，$x>0$ として，$x\fallingdotseq 0$ と考えれば

$$0^i=e^{i\log 0}$$

$$0^i=e^{i\times(-\infty)}$$

$$=\cos(-\infty)+i\sin(-\infty)$$

となり，振動しそうである。(定まらない)

§4. まとめ

生徒がいろいろ学習すると，

『$\sqrt{i}$ ってどうなるんですか？』

と質問することがたまにあって，多くは

『ルートの中に i を入れてはいけません。』

と指導するわけですが，たまにはちゃんと話してあげてもいい気がします。

ただ，その時にも『多価関数』という話はどうしても引っかかってしまいます。

ちょっと余談ですが，『多価関数』を積極的に認めると，正負の両方向に伸びていく数列が，数として表すことができる可能性があります。

『i^i をすべて加えると？』なんていう問題が作られるかもしれません。

《参考文献》

〔1〕 教科書　数学Ⅱ　数研出版

〔2〕 https://ja.wikipedia.org/wiki/指数関数

〔3〕 https://ja.wikipedia.org/wiki/I の i 乗

〔4〕 https://ja.wikipedia.org/wiki/0 の 0 乗

（東京都　城北中学校・高等学校）