複素数係数の 2 次方程式の「解の公式」とその活用

澤幡（さわはた）　通正（みちまさ）

§1. はじめに

「数学Ⅱ」の内容「複素数と方程式」では，扱う 2 次方程式の係数はすべて実数としている。また，「数学Ⅲ」の内容「複素数平面」では，定数項に虚数はあるが，その問いかけは「方程式～の解を求めよ。」の形で扱っており，方程式の前に次数はつけていない。しかし，複素数係数の 2 次方程式まで「解の公式」を作成しておき，それを導く過程を問うことで，2020 年度からの新テストでは十分扱うことが可能であると考える。

まず，高校の範囲内で複素数係数の 2 次方程式まで「解の公式」を作成してみよう。

§2. 解の公式

a，b，c は複素数とし，$a \fallingdotseq 0$ とする。このとき，2 次方程式

$$az^2+bz+c=0 \qquad \cdots\cdots(*)$$

の解を求めることを考える。

$(*)$ の両辺に $4a$ を掛けると

$$4a^2z^2+4abz+4ac=0$$

左辺を z に着目して平方完成すると

$$(2az+b)^2=b^2-4ac \qquad \cdots\cdots①$$

よって，2 次方程式$(*)$を解くことは，①の方程式を解くことと同値である。

ここで，$2az+b=Z$，$b^2-4ac=D$ とおくと，2 次方程式①は

$$Z^2=D \qquad \cdots\cdots②$$

を解けばよい。

$Z=x+yi$，$D=p+qi$ (x，y，p，q は実数)とおいて，②に代入すると

$$(x+yi)^2=p+qi$$

左辺を展開して整理すると

$$x^2-y^2+2xyi=p+qi$$

両辺の実部と虚部を比較すると，

$$\begin{cases} x^2-y^2=p & \cdots\cdots③ \\ 2xy=q & \cdots\cdots④ \end{cases}$$

である。

④より，$xy=\dfrac{q}{2}$ として，両辺を 2 乗すると

$$(xy)^2=\frac{q^2}{4}$$

つまり

$$x^2\cdot(-y^2)=-\frac{q^2}{4} \qquad \cdots\cdots⑤$$

③，⑤より，x^2，$-y^2$ は次の 2 次方程式の実数解である。

$$t^2-pt-\frac{q^2}{4}=0 \qquad \cdots\cdots⑥$$

⑥の判別式を D_1 とすると，

$$D_1=p^2+q^2 \geqq 0$$

となり，2 次方程式⑥は実数解をもつ。

よって

$$t=\frac{p\pm\sqrt{D_1}}{2}$$

したがって

$$x^2=\frac{p+\sqrt{D_1}}{2},\quad y^2=\frac{-p+\sqrt{D_1}}{2}$$

つまり

$$x=\pm\sqrt{\frac{p+\sqrt{D_1}}{2}},\quad y=\pm\sqrt{\frac{-p+\sqrt{D_1}}{2}}$$

である。

このうち，④を満たす組$(x,\ y)$は，

$$(x,\ y)=\left(\sqrt{\frac{p+\sqrt{D_1}}{2}},\ \sqrt{\frac{-p+\sqrt{D_1}}{2}}\right),$$
$$\left(-\sqrt{\frac{p+\sqrt{D_1}}{2}},\ -\sqrt{\frac{-p+\sqrt{D_1}}{2}}\right)$$

である。

よって，方程式①の解は，複素数の範囲内で重解も含めて2つあることがわかった。
したがって，方程式 $az^2+bz+c=0$ の解は，
$2az+b=x+yi$，$a\neq 0$ より

$$z=\frac{-b+(x+yi)}{2a}$$

ただし，x，y は実数で，$D=b^2-4ac$ のとき，

$$\begin{cases} x^2-y^2=\mathrm{Re}D \\ xy=\dfrac{1}{2}\mathrm{Im}D \end{cases}$$ を満たすものとする。

§3. 問題例

【例】 2次方程式 $z^2-2z-\sqrt{3}i=0$ を解け。
(高等学校数学科用　数学Ⅲ(数研出版)
P23　例題3で z を $z-1$ と改題)

【解説】 判別式を D とすると

$$D=(-2)^2-4\cdot(-\sqrt{3}i)=4+4\sqrt{3}i$$

よって，求める解は

$$z=\frac{2+(x+yi)}{2}$$

ただし，x，y は実数で $\begin{cases} x^2-y^2=4 & \cdots\cdots① \\ xy=2\sqrt{3} & \cdots\cdots② \end{cases}$

を満たす。
②より，$x^2\cdot(-y^2)=-12$ とすると，x^2，$-y^2$ は2次方程式 $t^2-4t-12=0$ の実数解である。
よって，

$$x^2=6,\ y^2=2$$

であるから

$$x=\pm\sqrt{6},\ y=\pm\sqrt{2}$$

このうち，②を満たす組 $(x,\ y)$ は

$$(x,\ y)=(\sqrt{6},\ \sqrt{2}),\ (-\sqrt{6},\ -\sqrt{2})$$

である。
したがって，2次方程式 $z^2-2z-\sqrt{3}i=0$ の解は，

$$z=\frac{2+\sqrt{6}+\sqrt{2}i}{2},\ \frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2}$$

入試での出題を見ると，次の**【問題1】**のように問いかけが「複素数 z の方程式～」となっており，高校の範囲内ではこの問いかけが限界であろう。**【問題1】**は，$\alpha=x+yi$ (x，y は実数)とおけばよく，**【問題2】**は2次方程式ではないが，この問題においても z と α を同様におくことでも解ける。どちらにしても**【例】**を経験しておけば十分であろう。なお，参考までに花子さんと太郎さんの対話形式で**【作問例】**を作成した。複素数係数の2次方程式の解の公式の作り方も学習できるのではないかと考える。出題する場合は適宜空欄を作ればよい。

【問題1】(『2018　数学Ⅲ　入試問題集』(18　東北大・理系)，数研出版　P17)
α を複素数とする。複素数 z の方程式

$$z^2-\alpha z+2i=0 \quad \cdots\cdots①$$

について，次の問いに答えよ。ただし，i は虚数単位である。
(1)　方程式①が実数解をもつように α が動くとき，点 α が複素数平面上に描く図形を図示せよ。
(2)　略

【問題2】(『2018　数学Ⅲ　入試問題集』(18　九州大・理系)，数研出版　P10)
α を複素数とする。等式

$$\alpha(|z|^2+2)+i(2|\alpha|^2+1)\overline{z}=0$$

を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。

【作問例】
ある日，花子さんと太郎さんのクラスでは，数学の授業で次のような課題が出された。次の会話は共同して解くために，放課後に交わされたものである。
【課題】 次の2次方程式を解きなさい。

$$z^2-2iz-1-\sqrt{3}i=0$$

花子：授業では，係数が実数の場合は2次方程式は解の公式を使えば，複素数の範囲ですべて解けることは証明したわね。
太郎：この問題は，係数が虚数だから解の公式を使わないで解くことになるのかな。
花子：そうね。でもちょっと解の公式を使ってみましょうか。判別式を D とすると，

$$D=(-2i)^2-4\cdot1\cdot(-1-\sqrt{3}i)=4\sqrt{3}i$$

であり，

$$z=\frac{2i\pm\sqrt{D}}{2}$$

となるね。
太郎：根号内に虚数があるのは見たことがない…。
花子：根号内が負の数なら，虚数を使って表せることは習ったわ。
太郎：このままでは $\sqrt{D}$ の意味がわからないなあ。だから，解の公式を使わないで解くことになるのだろうね。根号記号が出てこないところまでさかのぼってみればよいのかな。

花子：今日の授業で a，b，c は実数とし，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を求めるときに，両辺に $4a$ を掛けて，左辺を平方完成し，$(2ax+b)^2=b^2-4ac$ と整理したよね。その後，$D=b^2-4ac$ とおいて，D の符号が正，負，そして 0 の 3 つに分けて考えたわね。最終的に 2 次方程式の解の公式は 1 つに整理したけれども。

太郎：ここまでの変形は，係数が複素数の場合でも可能だね。

花子：それなら，課題の 2 次方程式の左辺をここまで変形してみましょうよ。

太郎：$(z-i)^2=i^2+1+\sqrt{3}\,i$，つまり，
$(z-i)^2=\sqrt{3}\,i$ となるね。

花子：これに似た方程式は，複素数の極形式を利用して解いたことがあるわ。でもここでは，x，y を実数として，$z-i=x+yi$ とおいて，x と y の値を求めればよいようね。

太郎：左辺に代入して整理すると

$$x^2-y^2+2xyi=\sqrt{3}\,i$$

この等式が成り立つための条件は，i は虚数単位で x^2-y^2，$2xy$ は実数だから，

$$x^2-y^2=0 \text{ かつ } xy=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

が成り立つね。

花子：$xy=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，$(xy)^2=\dfrac{3}{4}$ だから，

$x^2\cdot(-y^2)=-\dfrac{3}{4}$ とすると，x^2 と $-y^2$ を解にもつ 2 次方程式 $t^2-\dfrac{3}{4}=0$ が作れるね。

太郎：$x^2-y^2=0$ から $y=\pm x$ として，$xy=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ に代入すると $\pm x^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ x は実数だから，このうち，$x^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ が成り立つ。これでも同じ答えが得られるね。

花子：そうね。どちらにしても，$x=\pm\dfrac{\sqrt[4]{12}}{2}$，$y=\pm\dfrac{\sqrt[4]{12}}{2}$ と解けるわね。

太郎：この x，y の 4 つの組み合わせのうち，$xy=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たすのは，

$$x=\frac{\sqrt[4]{12}}{2},\ y=\frac{\sqrt[4]{12}}{2} \text{ または}$$

$$x=-\frac{\sqrt[4]{12}}{2},\ y=-\frac{\sqrt[4]{12}}{2}$$

だね。

花子：求める 2 次方程式の解は，$z-i=x+yi$ より，

$$z=\frac{\sqrt[4]{12}}{2}+\frac{2+\sqrt[4]{12}}{2}i,\ -\frac{\sqrt[4]{12}}{2}+\frac{2-\sqrt[4]{12}}{2}i$$

と求まるね。

太郎：2 次方程式の解が求まるのはうれしいけれど，係数が複素数になったとたんに，解の形がこれでは，…ね。

花子：解の公式は作れそうだけど，根号内に虚数が入る場合の意味がよくわからないわね。根号をとるまえに複素数解をもつと仮定して本当に求められた。だからこれが求める解である，という流れだったね。

太郎：アハハ。2 次方程式の解は，係数が複素数の範囲でもその解は複素数の範囲内にある，と推測できるね。

[追記]

平成 30 年度　東北大学　理学部　数学系　AO 入試Ⅱ期の第 2 問に次のような問題が出題された。

i を虚数単位とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　略

(2)　複素数 z が $z^2+(3+3i)z+(-6+2i)=0$ を満たすとき z を求めよ。

(3)　a，b，c を複素数の定数とし，$a\neq 0$ であるとする。このとき $ax^2+bx+c=0$ を満たす複素数 z が存在することを示せ。

《参考文献》

〔1〕『数学Ⅲ』，数研出版　P23

〔2〕『2018　数学Ⅲ　入試問題集』，数研出版　P10，P17

〔3〕『平成 30 年度 AO 入試問題集』P23
http://www.tnc.tohoku.ac.jp/images/news/2018_AOkakomon2.pdf
（東北大学入試センター）

（茨城県　水戸葵陵高等学校）