

地球の半径を測る

いしはら さとし
石原 諭

§1. はじめに

2018年9月3日の中日新聞夕刊に、「富士山ココ見える」という記事が載っていた。

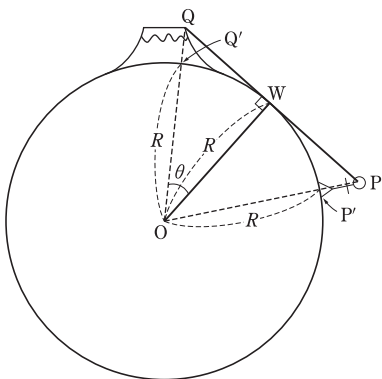
これは日本地図センターがネットで公開している富士山が見える地域を地図上で確認できるサイトである。(https://info.jmc.or.jp/fujisankoko)

今回は数学Ⅲの近似式の応用ということで、このデータを使って地球の半径を計算するという授業を行ったところ、生徒から興味をもったとの反応が多数あったので、ここで紹介させていただきたいと思う。以下と同じような計算は多くの文献に載っていると思われるが、私の手元には資料がなく、また高校生でも十分考えることができる内容であると思われるため、周知の内容であればご容赦願いたい。

地球の大きさを初めて測ったといえば、エラトステネスの話が有名である。彼は夏至の日の正午にはシエネの井戸には太陽光線が真上から差し込むことと、アレクサンドリアでは太陽光線の角度が真上から 7.2° 傾いていることから、地球の周長を求めたといわれている。(2つの町の間距離は歩いて測ったといわれている。)詳しくは適当な参考文献を参照されたい。

§2. 授業の展開

今回の授業は以下のように展開した。



富士山の高さを H 、目の高さを h 、地球の半径を R とする。(単位はすべて km) 地球は球形であると仮定した。O は地球の中心、P は目の位置、Q は富士山の山頂、P'、Q' はそれぞれ OP、OQ と地表の交点とする。

三平方の定理より

$$QW^2 = (R+H)^2 - R^2 = 2RH + H^2$$

$$\text{ゆえに } QW = \sqrt{2RH + H^2} = \sqrt{2RH} \sqrt{1 + \frac{H}{2R}}$$

ここで、近似式 $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$ を使うと

$$QW \approx \sqrt{2RH} \left(1 + \frac{H}{4R}\right) \approx \sqrt{2RH}$$

(ここで富士山の高さ H は $4R$ より十分小さいということを用いた)

同様に $PW \approx \sqrt{2Rh}$ を得る。

ここで $\tan \theta$ の $\theta=0$ のまわりの近似式を考えると (ここは生徒に計算させた)

$\theta \approx 0$ のとき $\tan \theta \approx \theta$ であるので、これを使うと、 $QW \approx$ 弧 $Q'W$ 、 $PW \approx$ 弧 $P'W$ であることがわかる。(この辺りは当たり前のように感じる生徒も多いと思うが、数学Ⅲの授業ではあえて式で説明した。数学活用などの授業で実践する場合は、ここまでする必要はないと思われる。)

ゆえに 弧 $Q'P' \approx QP = QW + WP$

$$= \sqrt{2RH} + \sqrt{2Rh}$$

$$= \sqrt{2R}(\sqrt{H} + \sqrt{h})$$

一方、新聞記事あるいは日本地図センターの Web サイトでみると、三重県の松阪市辺りまでは富士山が見えるようである。したがって、弧 $Q'P' = 225$ km と見積もるのが適当であると思われる。

これを代入すると $225 = \sqrt{2R}(\sqrt{H} + \sqrt{h})$

よって、 $\sqrt{R} = \frac{225}{\sqrt{2}(\sqrt{H} + \sqrt{h})}$ である。

ここで $H=3776 \times 10^{-3}$ であり、目の高さは 150 cm と仮定し、 $h=1.5 \times 10^{-3}$ とする。電卓で計算すると、

$$\begin{aligned}\sqrt{R} &= \frac{225}{\sqrt{2}(\sqrt{H} + \sqrt{h})} = \frac{225}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\sqrt{3776}}{10} + \frac{\sqrt{1.5}}{10}\right)} \\ &= \frac{2250\sqrt{5}}{\sqrt{3776} + \sqrt{1.5}} \approx 80.273\end{aligned}$$

となる。

2乗して、 $R \approx 6443.75$ (km) を得る。

Web サイトで地球の半径を調べたところ、 $R=6378.1$ km であるとのことなので、やや粗い近似になってしまったが、大体近い値が得られたのではなかろうか。

ちなみに、弧 $Q'P'=224$ km とすると、 $R \approx 6386.4$ km となり、かなり近い値が得られることも付け加えておく。

§3. おわりに

これ以外にも、富士山を見上げる角度を測ることで地球の半径を測るという授業展開も考えられるし、インターネット上では GPS 機能を利用した授業展開も多数見られる。最後に、私の町からは天気の良い日に富士山を見ることができる。今後も様々な方法で富士山を授業に役立てていきたいと思う。

(静岡県立浜松湖北高等学校)