絵の具の色は三原色から何色出来るか
～生徒に興味・関心を抱かせる重複組合せの問題～

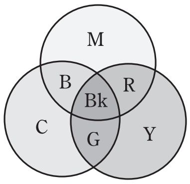
西元（にしもと）　教善（のりよし）

§1. はじめに

誰しも水彩絵の具を使って風景画やデザインを描いた経験がある。そのとき，持っている絵の具にはない色が必要なときは複数の絵の具を混ぜて作った経験もある。

絵の具の三原色は空色(Cyan)，赤紫色(Magenta)，黄色(Yellow)である。俗に青色(Blue)，赤色(Red)，黄色(Yellow)と言われるが，これは間違いである。プリンターのインクカートリッジの種類からもそのことはわかる。

余談であるが原理的には三原色をすべて混ぜると黒色(Black)ができるが，モノクロで単独の使用頻度が高いこともあり，ブラックとライトシアン，ライトマゼンタも含めて6色を使う。(私のプリンターではインクカートリッジはブラック，シアン，マゼンタ，イエロー，ライトシアン，ライトマゼンタの6色使用である。)



さて，三原色のうちの空色(Cyan)と赤紫色(Magenta)を1：1で混ぜると青色(Blue)になり，赤紫色(Magenta)と黄色(Yellow)を1：1で混ぜると赤色(Red)になり，黄色(Yellow)と空色(Cyan)を1：1に混ぜると緑色(Green)になる。

数学とはまったく別の話になるが次のことに生徒は興味・関心をもつだろう。

- 光の三原色は青色(Blue)，緑色(Green)，赤色(Red)で，絵の具の三原色とは異なる。
- 空色(Cyan)の絵の具は赤色の光を吸収し，青色と緑色の光を反射あるいは透過する。
- 赤紫色(Magenta)の絵の具は緑色の光を吸収し，青色と赤色の光を反射あるいは透過する。
- 黄色(Yellow)の絵の具は青色の光を吸収し，緑色と赤色の光を反射あるいは透過する。

これより，上のような現象が起こるわけである。

これは数学的に(こじつけて)いえば積事象である。

B：青色(Blue)，C：空色(Cyan)，G：緑色(Green)，M：赤紫色(Magenta)，R：赤色(Red)，Y：黄色(Yellow)とし，1：1に混ぜることを$\cap$で表すと $C\cap M=B$，$M\cap Y=R$，$Y\cap C=G$ である。1：1に混ぜればこのようになるが，混合比が変われば別の色になる。

三原色C，M，Yを混ぜるという立場から，使用しない場合は0とすれば，

C，M，Yを1：1：0の比に混ぜるとB
C，M，Yを0：1：1の比に混ぜるとR
C，M，Yを1：0：1の比に混ぜるとG

であるということができる。なお，1：1：1では黒色(Black)になる。

つまり，x，y，zを0以上の整数，nを自然数としてx，y，zの不定方程式 $x+y+z=n$ を考え，その解$(x,\ y,\ z)$に対して，空色(Cyan)，赤紫色(Magenta)，黄色(Yellow)を$x:y:z$の比に混ぜると，

$n=1$ のとき解は
$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$ の3個で，このとき色は空色(Cyan)，赤紫色(Magenta)，黄色(Yellow)の3色である。

$n=2$ のとき解は
$(x,\ y,\ z)=(2,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 2,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 2)$，
$(1,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 1)$，$(1,\ 0,\ 1)$
の6個で，このとき色は空色(Cyan)，赤紫色(Magenta)，黄色(Yellow)，青色(Blue)，赤色(Red)，緑色(Green)の6色になる。

では，$n=3,\ 4,\ 5$ のときはそれぞれ何色できるであろうか。さらには初めて100色以上できるnはいくらであろうか。

§2. 何色できるか
〜重複組合せの個数で考える〜

⑴　$n=3$ のとき

空色(Cyan)，赤紫色(Magenta)，黄色(Yellow)を $x:y:z$ ($x+y+z=3$, x, y, z は 0 以上の整数) の比に混ぜると，何色できるかに答えるには不定方程式 $x+y+z=3$,（x, y, z は 0 以上の整数）の解の個数を求めればよい。

異なる 3 つのもの C，M，Y から重複を認めて 3 個取り出す重複組合せの個数であるから

$$ {}_3\mathrm{H}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\cdot4}{2}=10 $$

個である。よって，10 色できる。

重複組合せ ${}_n\mathrm{H}_r={}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ を扱っていないときには，いわゆる「仕切り線」の方法で説明する。

たとえば，空色(Cyan)，赤紫色(Magenta)，黄色(Yellow)を 2：1：0 に混ぜるときは ○○|○|，1：1：1 に混ぜるときは ○|○|○ のように 3 個の○を 1 列に並べておき，2 本の仕切り線｜で仕切り，1 本目の仕切り線より左にある○の個数(○がないときは 0 と考える)で連比 $x:y:z$ の x を表し，1 本目と 2 本目の仕切り線の間にある○の個数(○がないときは 0 と考える)で連比 $x:y:z$ の y を表し，2 本目の仕切り線より右にある○の個数(○がないときは 0 と考える)で連比 $x:y:z$ の z を表すことにすれば，不定方程式 $x+y+z=3$,（x, y, z は 0 以上の整数)の解の個数は，○が 3 個，｜が 2 個ある計 5 個を 1 列に並べる「同じものを含む順列」から

$$ \frac{5!}{3!2!}={}_5\mathrm{C}_3={}_{3+3-1}\mathrm{C}_3={}_3\mathrm{H}_3 $$

個あることになる。

$\dfrac{5!}{3!2!}=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$ であるから，10 色できる。

⑵　$n=4$，5 のとき

⑴からわかるように，一般に，不定方程式 $x+y+z=n$,（x, y, z は 0 以上の整数，n は自然数)の解の個数は，重複組合せから

$$ {}_3\mathrm{H}_n={}_{3+n-1}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_2=\frac{(n+2)(n+1)}{2} $$

個である。これは連比 $x:y:z$ ($x+y+z=n$, x, y, z は 0 以上の整数) が何通りあるか，つまり，絵の具の三原色空色(Cyan)，赤紫色(Magenta)，黄色(Yellow)を $x:y:z$ ($x+y+z=n$, x, y, z は 0 以上の整数) という比で混ぜるときにできる色の種類を表している。

よって，

$n=4$ のとき　$\dfrac{(4+2)(4+1)}{2}=15$ (色)

$n=5$ のとき　$\dfrac{(5+2)(5+1)}{2}=21$ (色)

できる。

⑶　100 色以上できるための n

絵の具の三原色である空色(Cyan)，赤紫色(Magenta)，黄色(Yellow)を $x:y:z$ (ただし，$x+y+z=3$, x, y, z は 0 以上の整数) の比に混ぜると，異なる色が

$$ {}_3\mathrm{H}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_n={}_{n+2}\mathrm{C}_2=\frac{(n+2)(n+1)}{2} $$

色できる。

よって，100 色以上できるためには

$$ \frac{(n+2)(n+1)}{2}\geqq100 \iff (n+2)(n+1)\geqq200 $$

$14\cdot13=182$, $15\cdot14=210$ であるから，初めて 100 色以上になるのは $n=13$ のときである。

⑷　絵の具の三原色を 0.1 グラムの（0 以上の）整数倍を使って 1 グラムの絵の具をつくると何色できるか

この場合，空色(Cyan)を 0.1 グラムの 10 倍使って 1 グラムの空色(Cyan)を作ることも認められる。また，赤紫色(Magenta)，黄色(Yellow)をそれぞれ 0.1 グラムの 5 倍使って赤色(Red)を作ることも認められる。

前者は不定方程式 $x+y+z=10$,（x, y, z は 0 以上の整数）の 1 つの解（x, y, z)=(10, 0, 0) の場合であり，後者は不定方程式 $x+y+z=10$,（x, y, z は 0 以上の整数)の 1 つの解（x, y, z)=(0, 5, 5) の場合である。この場合，$x:y:z=1:1:1$ となる解はないので黒色(Black)はできないが，一体何色できるであろうか。

不定方程式 $x+y+z=10$,（x, y, z は 0 以上の整数）の解の個数が

$$ {}_3\mathrm{H}_{10}=\frac{(10+2)(10+1)}{2}=66 $$

個であることより，答は「66 色できる。」である。

(5)　絵の具の三原色を 0.1 グラムの自然数倍使って 1 グラムの絵の具をつくると何色できるか

不定方程式 $x+y+z=10$,（x, y, z は自然数）の 1 つの解の個数が色の種類数になる。

$x-1=X$, $y-1=Y$, $z-1=Z$ とおくと,

$X+Y+Z=7$,（X, Y, Z は 0 以上の整数）

と言い換えられるので,

$$ {}_3\mathrm{H}_7=\frac{(7+2)(7+1)}{2}=36 $$

個であることより，答は「36 色できる。」である。

§3. まとめ

「りんご，みかん，なしの 3 種類の果物を，含まれないものがあってもよいから 10 個の組合せを作ると何通りあるか。」というような問題より「絵の具の三原色を 0.1 グラムの（0 以上の）整数倍使って 1 グラムの絵の具をつくると何色できるか。」という問の方に興味・関心をもつだろうという思いから，これを題材にして重複組合せと不定方程式の解の個数を扱ってみた。

（山口県立高森高等学校）